

VŠB – Technická univerzita Ostrava

Fakulta strojní

Katedra mechaniky

**Dynamika mechanismu průmyslové pračky**

**The Dynamics of the Mechanism of the Washing Machine**

Student:

Radomír Bělík

Vedoucí bakalářské práce:

doc. Ing. Jiří Podešva, Ph.D.

Ostrava 2011

## Zadání bakalářské práce

Student: **Radomír Bělík**  
Studijní program: B2341 Strojírenství  
Studijní obor: 3901R003 Aplikovaná mechanika  
Téma: **Dynamika mechanismu průmyslové pračky**  
**The Dynamics of the Mechanism of the Washing Machine.**

Zásady pro vypracování:

1. Popis mechanismu.
2. Matematický popis dynamické úlohy.
3. Model pro metodu konečných prvků.
4. Modální analýza.
5. Harmonická analýza.
6. Vyhodnocení a závěr.

Seznam doporučené odborné literatury:

- [1] Brousil, J., Slavík, J., Zeman, V. : Dynamika. SNTL, Praha, 1989.
- [2] Juliš, K., Brepta, R. : Mechanika II. díl, dynamika. SNTL, Praha, 1987.
- [3] Bittnar, Z., Řeřicha, P. : Metoda konečných prvků v dynamice konstrukcí. SNTL, Praha, 1981.

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.


Vedoucí bakalářské práce: **doc. Ing. Jiří Podešva, Ph.D.**

Datum zadání: 17.12.2010

Datum odevzdání: 23.05.2011

  
\_\_\_\_\_  
doc. Ing. Jiří Podešva, Ph.D.  
vedoucí katedry



  
\_\_\_\_\_  
prof. Ing. Radim Farana, CSc.  
děkan fakulty

Prohlašuji, že jsem celou bakalářskou práci včetně příloh vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a uvedl všechny použité podklady a literaturu.

V Ostravě .....

.....

Radomír Bělík

Prohlašuji, že

- jsem byl seznámen s tím, že na moji diplomovou (bakalářskou) práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména § 35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a § 60 – školní dílo.
- beru na vědomí, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen „VŠB-TUO“) má právo nevýdělečně ke své vnitřní potřebě diplomovou (bakalářskou) práci užít (§ 35 odst. 3).
- souhlasím s tím, že diplomová (bakalářská) práce bude v elektronické podobě uložena v Ústřední knihovně VŠB-TUO k nahlédnutí a jeden výtisk bude uložen u vedoucího diplomové (bakalářské) práce. Souhlasím s tím, že údaje o kvalifikační práci budou zveřejněny v informačním systému VŠB-TUO.
- bylo sjednáno, že s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona.
- bylo sjednáno, že užít své dílo – diplomovou (bakalářskou) práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).
- beru na vědomí, že odevzdáním své práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, bez ohledu na výsledek její obhajoby.

V Ostravě .....

.....

podpis

Jméno a příjmení autora práce: Radomír Bělík

Adresa trvalého pobytu autora práce: Lískovecká 295, Frýdek-Místek

## ANOTACE BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

BĚLÍK, R. *Dynamika mechanismu průmyslové pračky: bakalářská práce*. Ostrava: VŠB – Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, Katedra mechaniky, 2011, 38 s. Vedoucí práce: Podešva, J.

Bakalářská práce se zabývá dynamikou mechanismu průmyslové pračky FS115. Cílem práce je určení dynamických vlastností vyvozených zatěžující silou. V úvodu je stručně popsána historie vzniku pračky jako nástroje. Další kapitola obsahuje popis jednotlivých částí mechanismu zkoumané pračky. Následující kapitola se zabývá matematickým modelem dynamické úlohy, je zde popsána teorie nutná k pochopení zkoumaného problému a její aplikace na jednoduchý příklad. Převedení geometrického modelu na model konenčoprvkový je popsáno v samostatné kapitole. Následně jsem pomocí programu ANSYS provedl modální a harmonickou analýzu s popisem jednotlivých výsledků těchto analýz.

## ANNOTATION OF BACHELOR THESIS

BĚLÍK, R. *The Dynamics of the Mechanism of the Washing Machine: Bachelor Thesis*. Ostrava: VŠB – Technical University of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Mechanical, 2011, 38 p. Thesis head: Podešva, J.

Bachelor thesis is dealing with the dynamics of the mechanism of the washing machine FS115. The introduction describes a history of the washing machine as a tool. Next chapter contains descriptions of the mechanism of the studied machine. Other chapter deals with the mathematical model of the dynamic task, theory which is necessary for understanding this problem and its application on simple example is described in this chapter. Transferring of the geometric model to finite-element model is described in separate chapter. Then I made a modal and harmonic analysis by ANSYS software with a description of every single results of these analysis.

# Obsah

Seznam použitých značek a symbolů .....	7
1. Úvod .....	8
2. Popis mechanismu .....	9
3. Matematický popis dynamické úlohy .....	11
3.1. Modální analýza .....	11
3.2. Harmonická analýza .....	16
4. Model pro metodu konečných prvků .....	18
5. Modální analýza .....	21
6. Harmonická analýza .....	29
6.1. Buzení .....	30
6.2. Amplitudová charakteristika .....	35
7. Vyhodnocení a závěr .....	39
Přehled použité literatury .....	41
Poděkování .....	42
Přílohy .....	43

## Seznam použitých značek a symbolů

$a_x, a_y$	[m/s <sup>2</sup> ]	Zrychlení
A, B, C	[-]	Koeficienty
B	[-]	Matice tlumení
e	[m]	Excentricita
$f_i$	[Hz]	Frekvence
$F_{ai}$	[N]	Budicí síla harmonického kmitání
$F_{Di}$	[N]	Direkční síla
K	[N/m]	Matice tuhosti
$k_i$	[N/m]	Tuhost pružiny
M	[kg]	Matice hmotnosti
$m$	[kg]	Hmotnost
n	[ot/min]	Otáčky
q,u	[m]	Posunutí
r	[m]	Sloupcový vektor posunutí
$u_a$	[m]	Amplituda harmonického kmitání
V	[-]	Modální matice
$\alpha$	[-]	Koeficient vnějšího tlumení
$\beta$	[-]	Koeficient vnitřního tlumení
$\Delta l_i$	[mm]	Prodloužení pružiny
$\lambda$	[s <sup>-2</sup> ]	Substituce
$\xi$	[-]	Poměrný útlum
$\pi$	[-]	Ludolfovo číslo
$\omega$	[s <sup>-1</sup> ]	Budicí kruhová frekvence
$\Omega$	[s <sup>-1</sup> ]	Vlastní kruhová frekvence
x, y, z	[-]	Označení souřadných os

## 1. Úvod

V minulosti bylo praní prádla čistě záležitost žen. Den, známý jako modré pondělí byl mezi ženami obávaný. Název skrýval víc než jen používání modřidla v oplachové vodě, ale symbolizoval také dřinu spojenou s praním. Proces začínal už v neděli, kdy ženy třídily špinavé prádlo a poté jej nechali přes noc namočené v teplé vodě, což vyžadovalo topení a její nošení od vodního zdroje. Následující den ráno začalo samotné praní, bylo třeba znovu přinést a ohřát vodu. Ženy poté prádlo třely a drhnuly, aby se zbavily špíny na oblečení. Tato práce vystavovala ruce vysokým teplotám a také účinku žíravých látek (louh, vápno,...). Na závěr se do oplachové vody nasypalo modřidlo které mělo neutralizovat žloutnutí prádla způsobné mýdlem. V dalším kroku, bylo prádlo rozvěšeno na pradelní šňůry kvůli sušení. Další den následovalo škrobení a žehlení onoho vypraného prádla.



Obr. 1.1 – nástroj pro drhnutí



Obr. 1.2 – nástroj pro míchání a ždímání

V 90. letech 18. století docházelo k postupné mechanizaci praní prádla. Byly vynalezeny první zařízení, které nahrazovaly některé kroky v procesu praní a to drhnutí, míchání či ždímání a lze je vidět na obrázcích. Zařízení na obr. 1.1 sloužilo k drhnutí prádla, kdežto zařízení na obr. 1.2 bylo určeno k míchání a následnému ždímání. Tyto zařízení stále potřebovaly teplou vodu a hnací sílu, což byly ruce žen. Začátkem 20. století docházelo k elektrifikaci a vývoji nových zařízení. Lidská práce byla nahrazena prací motoru a ženy si mohly konečně oddychnout.

THE WASHDAY FREEDOM ENJOYED BY HUNDREDS OF THOUSANDS OF WOMEN CAN BE YOURS WITH A **BENDIX** Automatic HOME LAUNDRY

Freedom From the Labor of Pre-Soaking Clothes - A BENDIX eliminates the troublesome, time-consuming job of pre-soaking clothes. No more sloshing in cold water that is so hard on your hands.

Freedom From the Repetitious Garment Handling - A BENDIX does away with the tedious handling of the same wet garments over and over again. You say goodbye to red, chapped hands.

Freedom From Cleaning Washer - A BENDIX relieves you of the sloppy, distasteful task of cleaning the washer. There's no lifting out of cumbersome parts, no scrubbing or wiping.

Freedom From Mopping Floor - With a BENDIX, there's no mopping up wet, dangerous, slippery floors... no more to wipe out... no more odds due to wet shoes.

**A BENDIX DOES ALL THESE WASHDAY JOBS Automatically**

- 1 Fills Itself With Water**  
You click a switch and the BENDIX automatically fills itself with water... the right amount... at the right temperature.
- 2 Washes Your Clothes**  
The patented "Tumble-washing" action automatically washes your clothes thoroughly, yet ever so gently.
- 3 Triple Rinses**  
Three separate rinses... automatically... with clean, fresh water each time.
- 4 Damp-Dries Clothes**  
After the last rinsing, your BENDIX speeds up... automatically... to whet your clothes damp dry, ready for the line or dryer.
- 5 Cleans and Empties Itself**  
All dirt particles and stray rags inside the cylinder are washed away and flushed down the drain automatically.
- 6 Shuts Itself Off**  
When your wash is finished - don't hurry back - the BENDIX shuts itself off automatically - at just the right time.

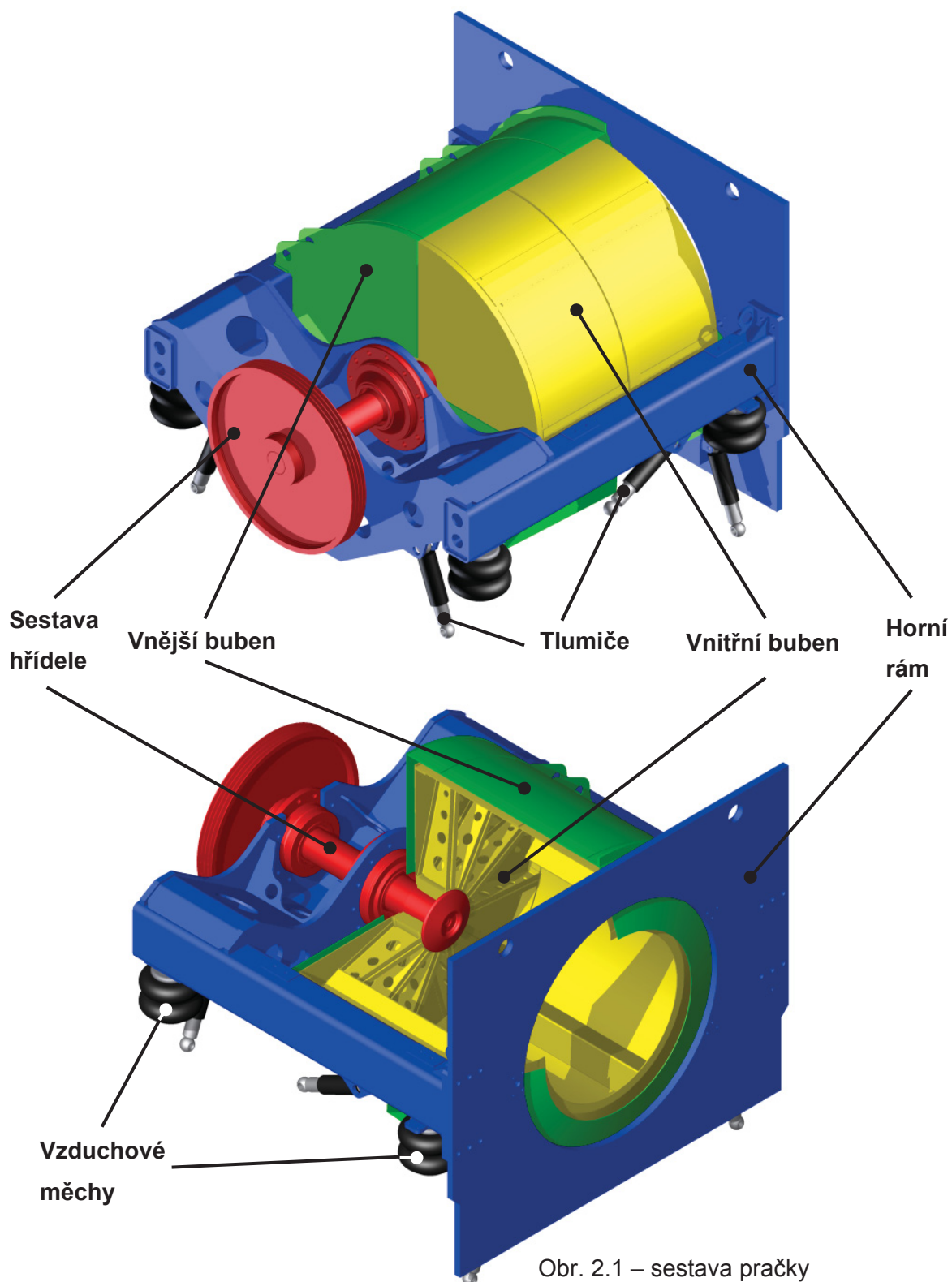
Obr. 1.3 – reklama na pračku

V 50. letech 20. století docházelo k slučování jednotlivých zařízení do jednoho celku. V těchto letech začaly vznikat pračky, jak je známe dnes. Od této doby došlo k mnoha technickým vylepšením počínaje použitím dvourychlostních elektromotorů až po zavedení řídicí jednotky sledující celý průběh praní a zajištění případného upravení pracího procesu. Dnes lze také najít pračky rozličných velikostí, jejíž kapacita může být až 120kg prádla.



## 2. Popis mechanismu

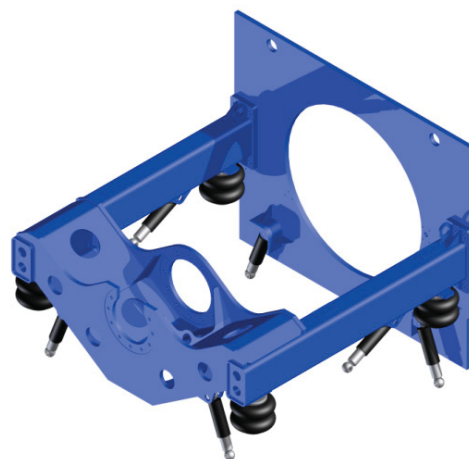
Předmětem analýzy je průmyslová pračka Primus FS115 jejíž kapacita je 115kg znečištěného prádla. Zkoumaná část pračky se skládá z několika dílčích komponentů, které jsou podrobněji popsány níže. Pro lepší orientaci v modelu jsou jednotlivé komponenty barevně odlišeny.



Obr. 2.1 – sestava pračky

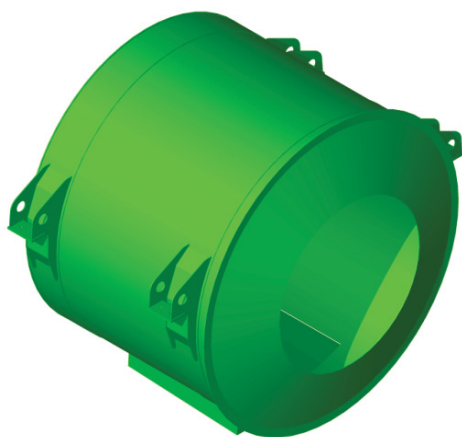
## Horní rám

Horní rám je nosná část zkoumaného celku, k němuž jsou připojeny ostatní komponenty. Přední část tvoří hrubá deska, která je ve finále osazena ovládacím panelem a zavíracím víkem bubnu. Na opačné straně se nacházejí dvě desky, sloužící pro uložení sestavy hřídele s ložisky. Horní rám je za pomoci čtyř vzduchových měchů (pružin) a šesti tlumičů připojen ke střednímu rámu pračky, ten ale není součástí dynamické analýzy.



Obr. 2.2 – horní rám

## Vnější buben

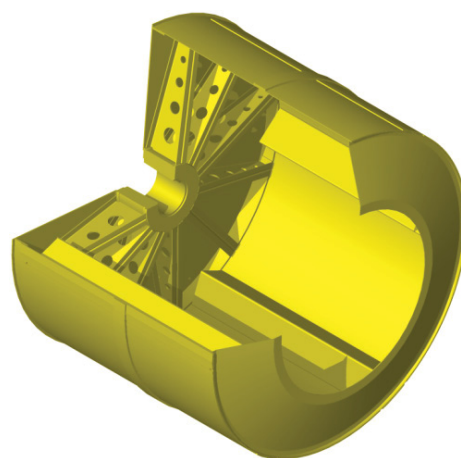


Obr. 2.3 – vnější buben

Buben je zavěšen pomocí čtyř patek k hornímu rámu. Celý obvod bubnu je vyztužen dvěma obručkami, k nimž jsou patky přivařeny. Vnější buben zabezpečuje oddělení prostoru, který je zaplněn vodou od zbytku pračky, na spodní části je připevněna vana, jejímž úkolem je sběr a odvod vody. K vnějšímu bubnu je také připojena soustava potrubí, jejím úkolem je doprava vody do pracího procesu. Potrubní soustava ovšem není pro analýzu důležitá, proto nebude ve výpočtech zohledněna.

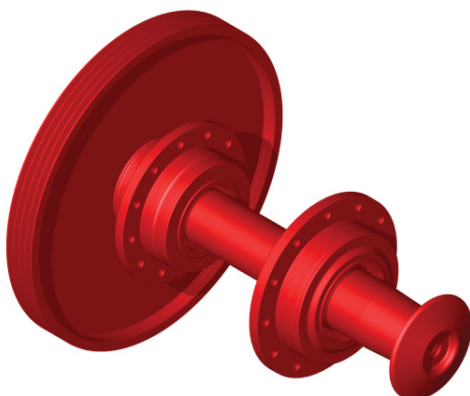
## Vnitřní buben

Vnitřní buben je část, která je zatížená znečištěným prádlem a probíhá v ní samotný proces praní. Je tvořen nábojem, k němuž jsou přivařena příčná žebra pro zvýšení tuhosti zadní desky. Plášť vnitřního bubnu je tvořen několika segmenty, ty jsou spojeny pomocí obruče a podélných žebér, které přispívají ke zvýšení tuhosti bubnu. Podélné žebra plní nejen funkci výztuhy, ale také slouží jako překážky, čímž přispívají k lepšímu promíchání prádla při pracím procesu.



Obr. 2.4 – vnitřní buben

## Sestava hřídele



Obr. 2.5 – sestava hřídele

Hřídel je uložena letmo se dvěma převislými konci. Na jedné straně se nachází řemenice, která za pomoci řemenu přenáší krouticí moment od motoru na hřídel, na straně druhé je připevněn vnitřní buben. Spojení bubnu s hřídelí je realizováno stykem dvou kuželových ploch pojištěných příložkou. Hřídel je uložena na dvou válečkových ložiscích umožňující rotaci v axiálním směru.

## 3. Matematický popis dynamické úlohy

Pro řešení úlohy bude použita metoda konečných prvků. V literatuře je princip metody popsán takto: „*MKP převádí řešení spojitých konstrukcí a konstrukčních systému na řešení soustav s konečným počtem stupňů volnosti*“.[1] Po rozložení jednotlivých částí pračky na konečné prvky (elementy), budou pro tyto elementy sestaveny pohybové rovnice. Vyřešením těchto rovnic dostaneme dynamické vlastnosti soustavy.

Náplní této práce je modální a harmonická analýza, jejíž podstata a postup výpočtu je popsán níže.

### 3.1. Modální analýza

Úkolem modální analýzy je zjištění vlastních frekvencí a vlastních tvarů. Tyto veličiny popisují dynamické vlastnosti soustavy, které nejsou závislé na buzení. Znalost těchto veličin je velmi přínosná ba dokonce i nezbytná, chceme-li navrhovat bezproblémové a spolehlivě pracující stroje či bezpečné konstrukce.

Modální analýza neboli vlastní kmitání není, jak již bylo uvedeno závislé na buzení a lze ho rozdělit na dvě skupiny:

- Vlastní tlumené kmitání
- Vlastní netlumené kmitání

V následujícím výkladu se budeme zabývat pouze vlastním netlumeným kmitáním, které je popsáno homogenní diferenciální rovnicí ve tvaru

$$M \cdot \ddot{q} + K \cdot q = 0 \quad (3.1)$$

Kde **M** je matice hmotnosti a **K** je matice tuhosti. Řešením rovnice (3.1) je

$$q(t) = u \cdot \sin(\Omega \cdot t + \varphi) \quad (3.2)$$

a následně vyjádříme jeho druhou derivaci podle času

$$\ddot{q}(t) = -u \cdot \sin(\Omega \cdot t + \varphi) \Omega^2 \quad (3.3)$$

Dosadíme-li tyto rovnice do (3.1) a upravíme, dostaneme základní rovnici pro řešení vlastního netlumeného kmitání

$$(K - M\Omega^2) \cdot u = 0 \quad (3.4)$$

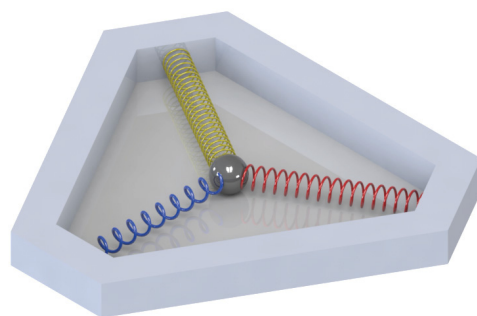
Vektor **u** je zatím neznámý vektor a **Ω** zatím neznámé číslo. Rovnice představuje z matematického hlediska tzv. zobecněný problém vlastních čísel. Další postup výpočtu je závislý na použité metodě řešení pro nalezení vlastních čísel a vektorů. Metod je nepřeberné množství a popis jednotlivých metod jednotlivých není předmětem této práce, ale uvedeme alespoň názvy některých:

- Rayleighova – Ritzova metoda
- Metoda inverzní iterace
- Metoda iterace podprostoru
- Jacobiho metoda rotací

Pro lepší názornost a pochopení principu modální analýzy je uveden vzorový příklad.

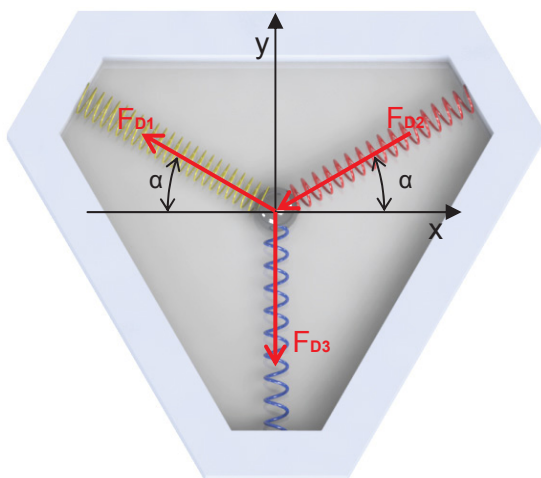
### Příklad

Kulička o hmotnosti  $m = 5 \text{ kg}$  má dva stupně volnosti a je uchycena na třech pružinách, které mají rozdílné tuhosti. Žlutá pružina má tuhost  $k_1 = 2000 \text{ N/m}$ , červená  $k_2 = 3500 \text{ N/m}$  a modrá  $k_3 = 6000 \text{ N/m}$ . Pružiny mezi sebou svírají úhel  $120^\circ$ . Při výpočtu předpokládejte malé deformace.



Obr. 3.1 – mechanismus

V prvním kroku zavedeme souřadný systém a silové účinky pružin, abychom mohli určit směr působících sil, posuneme kuličku z rovnovážné polohy libovolným směrem. Pružiny vytvoří směrné síly, jejichž směr bude opačný než směr namáhání.



Obr. 3.2 – schéma působení sil

Dalším krokem, bude sepsání pohybových rovnic kuličky ve směrech os x a y.

$$\begin{aligned} m \cdot a_x &= -F_{D1} \cdot \cos \alpha - F_{D2} \cdot \cos \alpha \\ m \cdot a_y &= F_{D1} \cdot \sin \alpha - F_{D2} \cdot \sin \alpha - F_{D3} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Velikost směrné síly je dána tuhostí a deformací (prodloužením) pružiny. Tato závislost je dána lineární rovnicí:

$$F_{Di} = k_i \cdot \Delta l_i \quad (3.6)$$

Následně si vyjádříme prodloužení jednotlivých pružin

$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha \\ \Delta l_2 &= x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha \\ \Delta l_3 &= y \end{aligned} \quad (3.7)$$

Vyjádřené prodloužení (3.7) dosadíme do vztahu (3.6) a velikosti směrných sil do (3.5). Zrychlení lze také zapsat ve tvaru druhé derivace souřadnice podle času. Po jednoduché matematické úpravě dostaneme rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{x} + x \cdot (k_1 \cdot \cos^2 \alpha + k_2 \cdot \cos^2 \alpha) + y \cdot (k_2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha - k_1 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha) &= 0 \\ m \cdot \ddot{y} + x \cdot (k_2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha - k_1 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha) + y \cdot (k_1 \cdot \sin^2 \alpha + k_2 \cdot \sin^2 \alpha + k_3) &= 0 \end{aligned}$$

Výrazy v závorkách lze nahradit substitucí  $k_{ij}$  kde  $i$  odpovídá číslu rovnice a  $j$  souřadnici. Soustavu rovnic přepíšeme ve tvaru se substitucí

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{x} + x \cdot k_{11} + y \cdot k_{12} &= 0 \\ m \cdot \ddot{y} + x \cdot k_{21} + y \cdot k_{22} &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Soustavu rovnic lze také zapsat tak v maticovém tvaru, který je shodný s výrazem (3.1)

$$M \cdot \ddot{r} + K \cdot r = 0$$

Po rozepsání matic dostáváme maticovou rovnici ve tvaru

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Soustavu si můžeme vyčíslit

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4125 & 649,5 \\ 649,5 & 7375 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Provedeme-li matematické úpravy, získáme rovnici, která je základní rovnici pro řešení vlastního netlumeného kmitání (3.4). Následně tato rovnice představuje soustavu lineárních rovnic pro neznámé amplitudy  $u_i$ . Abychom dostali netriviální řešení, kdy alespoň jedna amplituda vektoru  $\mathbf{u}^T = [u_1, u_2, \dots] \neq 0$  musí být determinant soustavy

$$\det(K - M\Omega^2) = 0 \quad (3.9)$$

Tento determinant nazýváme *frekvenčním determinantem* a po jeho rozvinutí a následné úpravě dostáváme frekvenční rovnici

$$m \cdot \Omega^4 - (k_{22} + k_{11}) \cdot m \cdot \Omega^2 + k_{11} \cdot k_{22} - k_{12} \cdot k_{21} = 0 \quad (3.10)$$

Lze si povšimnout, že tato rovnice je bikvadratická a zavedeme-li substituci ve tvaru

$$\lambda = \Omega^2 \quad (3.11)$$

kterou dosadíme do výrazu (3.10), výsledkem bude kvadratická rovnice

$$m^2 \cdot \lambda^2 - (k_{22} + k_{11}) \cdot m \cdot \lambda + k_{11} \cdot k_{22} - k_{12}^2 = 0 \quad (3.12)$$

Po vyřešení kvadratické rovnice dostaneme dva kořeny, jež po upravení substituce (3.11) a přihlédneme-li k tomu, že frekvence musí být nezáporná, dostaneme dvě hodnoty vlastní kruhové frekvence, které uspořádáme vzestupně.

$$\Omega_1 = 28,28 s^{-1}$$

$$\Omega_2 = 38,73 s^{-1}$$

Hodnoty vlastních frekvencí vypočteme pomocí vztahu

$$f_i = \frac{\Omega_i}{2 \cdot \pi} \quad (3.13)$$

Vlastní frekvence mají tyto hodnoty

$$f_1 = 4,5 \text{ Hz}$$
$$f_2 = 6,16 \text{ Hz}$$

Nyní, při znalosti velikosti vlastních kruhových frekvencí můžeme napsat tzv. modální matici, kterou dostaneme z frekvenčního determinantu

$$V = \begin{bmatrix} k_{22} - m \cdot \Omega_1^2 & k_{22} - m \cdot \Omega_2^2 \\ -k_{21} & -k_{21} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Po vyčíslení, bude modální matice vypadat následovně

$$V = \begin{bmatrix} 3376 & -125 \\ -649,5 & -649,5 \end{bmatrix}$$

První řádek modální matice přísluší ose **x**, druhý ose **y**. Sloupce modální matice udávají tzv. vlastní vektory neboli vlastní tvary. Pro ucelenější představu jak bude soustava kmitat, provedeme tzv. normování na jedničku. Což znamená, že každý vlastní tvar vydělíme takovým číslem, aby konečné nejvyšší číslo, byla jednička.

$$V_{norm} = \begin{bmatrix} 1 & 0,192 \\ -0,192 & 1 \end{bmatrix}$$

Normováním jsme dostali ucelenější představu, jak daná soustava kmitá. Vychýlí-li se kulička při prvním vlastním tvaru např. 1mm doprava po ose x, dojde také k posunutí o 0,192mm po ose y, ovšem v záporném směru.

Pro ověření výsledků jsem tento příklad zpracoval také metodou konečných prvků v programu ANSYS. Vlastní frekvence vypočtené ANSYSem byly srovnány s ručním výpočtem. Hodnoty vlastních frekvencí byly shodné. V ANSYSu lze také provést animace vlastních tvarů, ty jsou součástí přílohy a jsou označeny:

- pro první vlastní tvar: pr\_modal01.avi
- pro druhý vlastní tvar: pr\_modal02.avi



### 3.2. Harmonická analýza

Cílem harmonické analýzy je zjistit odezvu soustavy, na kterou bude působit síla, která je známou funkcí času. Takovéto síly jsou u kmitavých pohybů nazývány jako *síly budící*. Důležité je také vyšetření, zda v soustavě nedochází k rezonanci. Rezonance nastává, je-li kruhová frekvence budící síly shodná s vlastní kruhovou frekvencí soustavy. Dojde-li k rezonanci, amplituda kmitání prudce naroste, což může mít pro soustavu katastrofální následky.

Vynucené harmonické kmitání bez tlumení je popsáno homogenní diferenciální rovnicí ve tvaru

$$M \cdot \ddot{q} + K \cdot q = f \quad (3.15)$$

Kde **M** je matice hmotnosti, **K** je matice tuhosti a *f* je sloupcová matice působících sil. Uvažujeme-li ustálené kmitání a síly se společnou fází, tak řešením rovnice (3.15) je

$$q(t) = u \cdot \sin \omega t \quad (3.16)$$

a následně vyjádříme jeho druhou derivaci.

$$\ddot{q}(t) = -u \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t \quad (3.17)$$

V případě, že by síly nebyly ve fázi, mělo by řešení tvar

$$C \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) = A \cdot \cos \omega t + B \cdot \sin \omega t \quad (3.18)$$

kde vztah mezi koeficienty A, B a C,  $\varphi_0$  je

$$\varphi_0 = \arctan \frac{A}{B} \quad (3.19)$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \quad (3.20)$$

Pro další řešení je třeba sestavit tzv. matici dynamické tuhosti, kterou získáme dosazením (3.17) a (3.16) do pohybové rovnice (3.15). Po jejím upravení bude výsledkem

$$\begin{bmatrix} k_{11} - m \cdot \omega^2 & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} - m \cdot \omega^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_{a1} \\ u_{a2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{a1} \\ F_{a2} \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

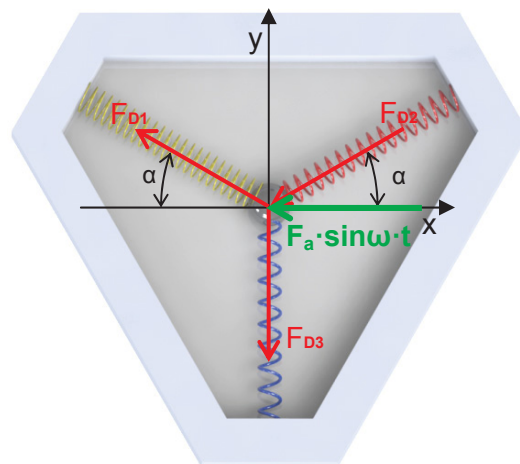


Kde první matice, je námi hledaná matice dynamické tuhosti, druhá matice je sloupcová matice amplitud a na pravé straně se nachází sloupcová matice sil. Vyřešením této soustavy rovnic dostaneme hodnoty amplitud ve směrech jednotlivých stupňů volnosti.

Postup výpočtu lze demonstrovat na jednoduchém příkladě.

### Příklad

Použijeme stejné zadání jako v kapitole 3.1, ovšem s tím rozdílem, že na kuličku bude působit harmonická síla  $F_a = 200\text{N}$ , která bude mít harmonický průběh s frekvencí  $f = 10\text{Hz}$ . Směr působení síly je shodný s osou  $x$ .



Nejprve sepíšeme pohybové rovnice

Obr. 3.3 – schéma působení sil

$$\begin{aligned} m \cdot a_x &= -F_{D1} \cdot \cos \alpha - F_{D2} \cdot \cos \alpha - F_a \cdot \sin \omega t \\ m \cdot a_y &= F_{D1} \cdot \sin \alpha - F_{D2} \cdot \sin \alpha - F_{D3} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Následně vyjádříme direkční síly dosazením (3.7) a (3.6) do rovnice (3.22), provedeme matematické úpravy a zavedeme substituci

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{x} + x \cdot k_{11} + y \cdot k_{12} &= -F_a \cdot \sin \omega t \\ m \cdot \ddot{y} + x \cdot k_{21} + y \cdot k_{22} &= 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Výsledkem je téměř stejná soustava rovnic jako (3.7) ovšem s tím rozdílem, že je pravé straně zahrnuto působení síly  $F$  s harmonickým průběhem. Zapišeme-li soustavu v maticovém tvaru, dostaneme

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F_a \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot \sin \omega t \quad (3.24)$$

Abychom mohli určit amplitudy je nutno dopočítat kruhovou frekvenci budící síly  $\omega$  a to ze vztahu

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f \quad (3.25)$$

Řešením těchto diferenciálních rovnic je

$$\begin{aligned}x &= x_a \cdot \sin \omega t \\ y &= y_a \cdot \sin \omega t\end{aligned}\tag{3.26}$$

a jejich druhé derivace

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -x_a \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t \\ \ddot{y} &= -y_a \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t\end{aligned}\tag{3.27}$$

Chceme-li znát amplitudy kuličky v jednotlivých souřadnicích, musíme sestavit tzv. matici dynamické tuhosti, kterou dostaneme, dosadíme-li (3.27) a (3.26) do (3.25), výsledkem bude tato soustava

$$\begin{aligned}-x_a \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t \cdot m + x_a \cdot \sin \omega t \cdot k_{11} + y_a \cdot \sin \omega t \cdot k_{12} &= -F_a \cdot \sin \omega t \\ -y_a \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t \cdot m + x_a \cdot \sin \omega t \cdot k_{21} + y_a \cdot \sin \omega t \cdot k_{22} &= 0\end{aligned}\tag{3.28}$$

Jelikož se v rovnicích u všech členů vyskytuje výraz  $\sin \omega t$ , lze ho vypustit, následně vytkneme amplitudy a dostaneme soustavu rovnic o dvou neznámých. Řešením této soustavy dostaneme hodnoty amplitud v jednotlivých směrech

$$\begin{aligned}(k_{11} - m \cdot \omega^2) \cdot x_a + k_{12} \cdot y_a &= -F_a \\ k_{21} \cdot x_a + (k_{22} - m \cdot \omega^2) \cdot y_a &= 0\end{aligned}\tag{3.29}$$

Je nutno podotknout že výsledné hodnoty vyjdou v metrech a pro lepší představu maximálních výchylek je lepší tyto jednotky převést na milimetry.

$$\begin{aligned}x_a &= 12,85 \text{ mm} \\ y_a &= 0,68 \text{ mm}\end{aligned}$$

Tuto úlohu jsem také vypracoval v programu ANSYS, výsledky se shodovaly s analytickým řešením. Součástí přílohy je také animace, která znázorňuje průběh kmitání. Animace je označena: pr\_harmonic.avi

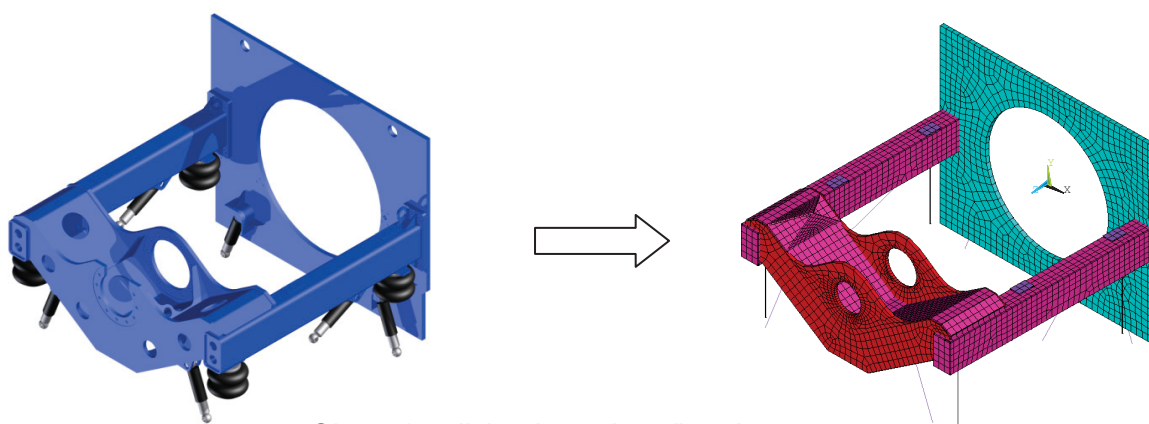
#### 4. Model pro metodu konečných prvků

Jak již bylo v předchozí kapitole uvedeno, úlohu budeme řešit pomocí metody konečných prvků, ta vychází z výpočtového neboli konečnoprvkového modelu.

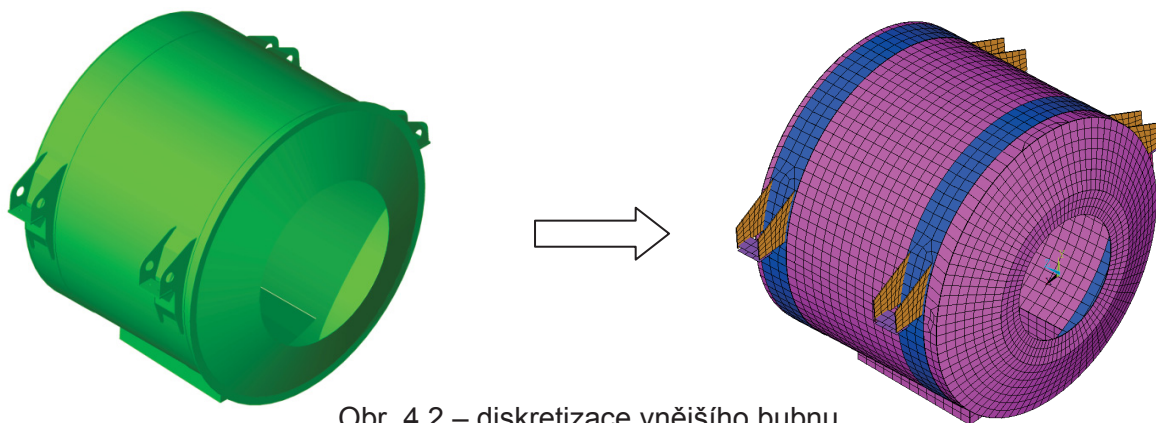
Stručně si popíšeme jeho vytvoření. Geometrický model je zjednodušen pouze na součásti, které jsou pro výpočet důležité a následně je na ně „natáhnuta“ jakási síť, ta každou součást rozdělí na konečný počet prvků a jak již bylo zmíněno, pro každý prvek bude samostatně sestavena pohybová rovnice, z níž dostaneme výsledné řešení.

Úloha bude řešena za pomoci výpočetního softwaru ANSYS 12 a to zejména v klasickém prostředí APDL nechvalně přezdívané „černé okno“.

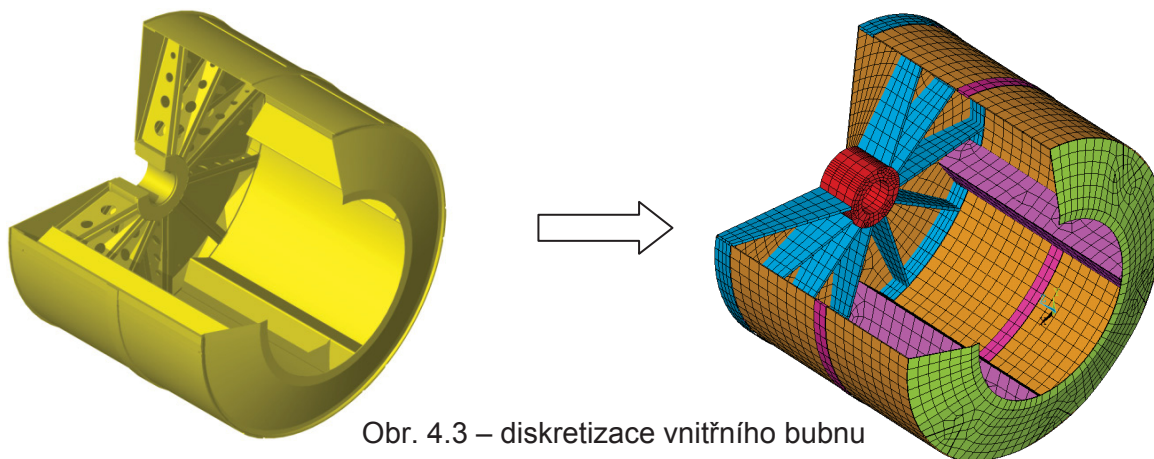
Pro vytvoření konečnoprvkového modelu bylo použito několik druhů prvků, které se liší jak velikostí a tvarem ale hlavně oblastí jejich použitelnosti. Abychom mohli u plechů a všech tenkostěnných součástí dostat relevantní výsledky, je zapotřebí aby na pokrytí tloušťky součásti byly použity alespoň tři objemové prvky, což má za následek velký počet elementů a výpočet se stává časově velmi náročný. Pro takovéto součásti byl vymyšlen tzv. skořepinový prvek (shell), jenž je plochý, čtyřuzlový a jeho hlavním parametrem je tloušťka. Při použití v praxi již není třeba používat na zohlednění tloušťky tři objemové prvky ale pouze jeden skořepinový, jemuž definujeme požadovanou tloušťku. Z výkresové dokumentace je známa hmotnost a poloha motoru, protože tato hmotnost je nezanedbatelná, byla v modelu také zohledněna. Hmotnost motoru byla soustředěna do jednoho elementu (mass) umístěného na základě výkresové dokumentace.



Obr. 4.1 – diskretizace horního rámu

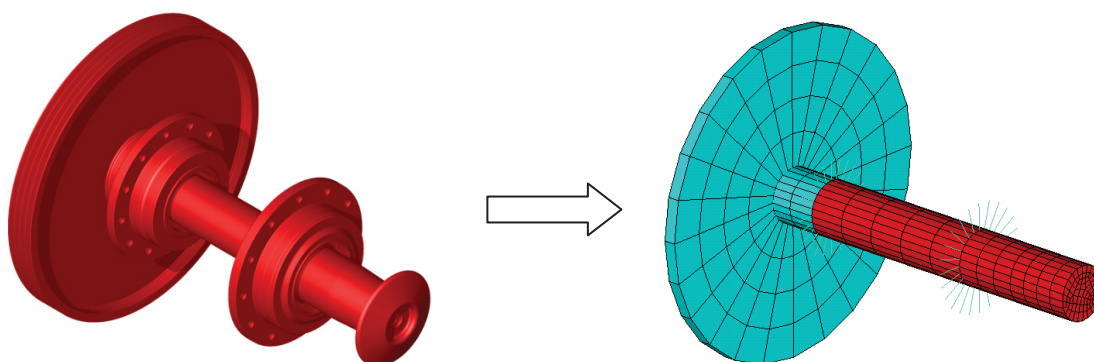


Obr. 4.2 – diskretizace vnějšího bubnu



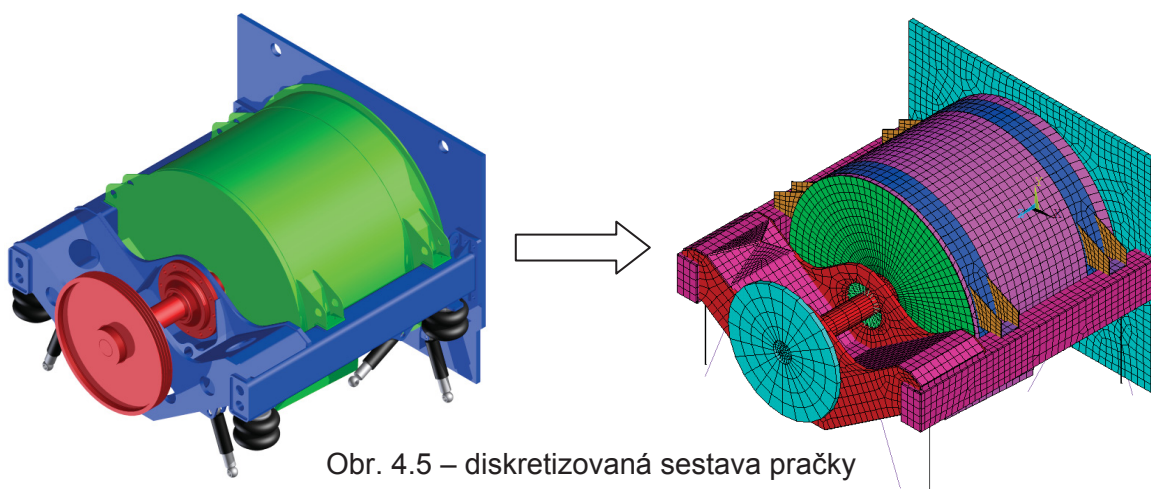
Obr. 4.3 – diskretizace vnitřního bubnu

Model ovšem obsahuje součásti, kde se použitím objemovým (solid) prvkům nevyhneme a to při modelování hřídele a náboje vnitřního bubnu.



Obr. 4.4 – diskretizace sestavy hřídele

Pro pružné uložení pračky jsou použity dva typy prvku. Vzduchové měchy (pružiny) které mají zadanou jak svislou tuhost  $100.7\text{ kN/m}$  tak i vodorovnou  $22\text{ kN/m}$ . Proto byl zde použit nosíkový (beam) prvek, jehož průřezová plocha a moment setrvačnosti byl napočítán tak, aby odpovídal zadaným tuhostem. Tlumiče s koeficientem tlumení  $4200\text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$  byly nahrazeny jednorozměrným prvkem typu link, jehož hlavní vlastností je právě tlumení.



Obr. 4.5 – diskretizovaná sestava pračky

## 5. Modální analýza

V kap. 3.1 bylo zmíněno, že úkolem modální analýzy je nalezení vlastních frekvencí a tvarů popisující dynamické chování soustavy, jež není závislá na buzení. Analýza byla provedena na netlumené soustavě pouze pro prvních 9 vlastních frekvencí a vlastních tvarů. Prvním šesti vlastním tvarů přísluší šest relativně nízkých frekvencí, což potvrzuje pružné uložení soustavy. Následující tři vlastní tvary mají výrazně vyšší frekvence. Přehled hodnot vlastních frekvencí s označením názvu animace nalezneme v tab. 5.1

	Frekvence [Hz]	Animace
1.	1,11	modal_01.avi
2.	1,21	modal_02.avi
3.	1,45	modal_03.avi
4.	2,31	modal_04.avi
5.	2,37	modal_05.avi
6.	3,47	modal_06.avi
7.	21,45	modal_07.avi
8.	27,73	modal_08.avi
9.	30,50	modal_09.avi

Tab. 5.1 přehled vlastních frekvencí

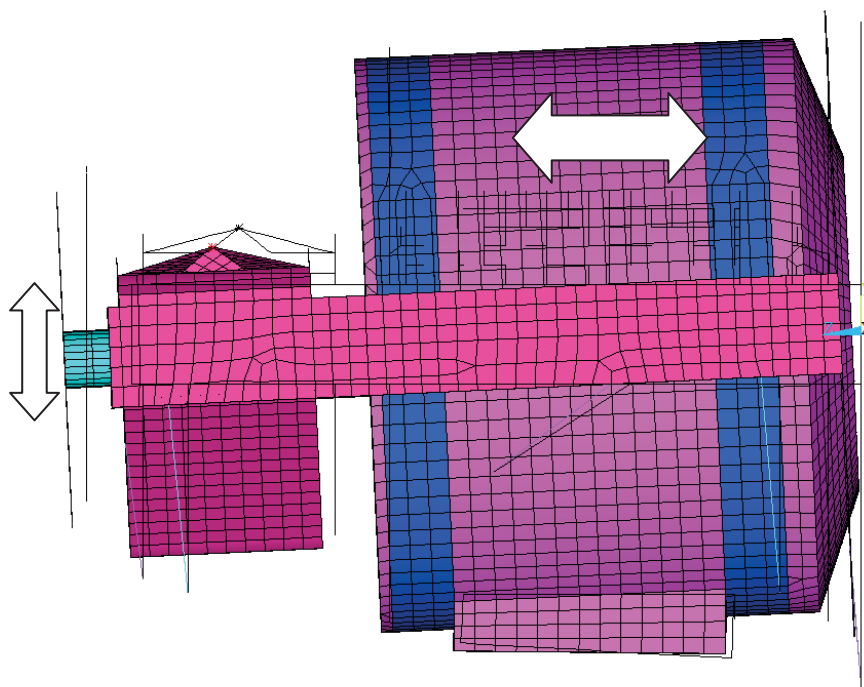
Zobrazení první šesti vlastních tvarů je dvojího druhu. První zobrazuje posunutou soustavu spolu s obrysy původního umístění, velikost posunutí je však v měřítku. Jsou zde také barevně rozlišeny jednotlivé tloušťky plechů, které jsou použity na skutečné konstrukci pračky. V druhém typu zobrazení, je soustava v původní poloze, kde směr a velikost posunutí jednotlivých elementů je realizováno vektory. Vlastní tvary zobrazují, jak soustava kmitá při určité (vlastní) frekvenci.



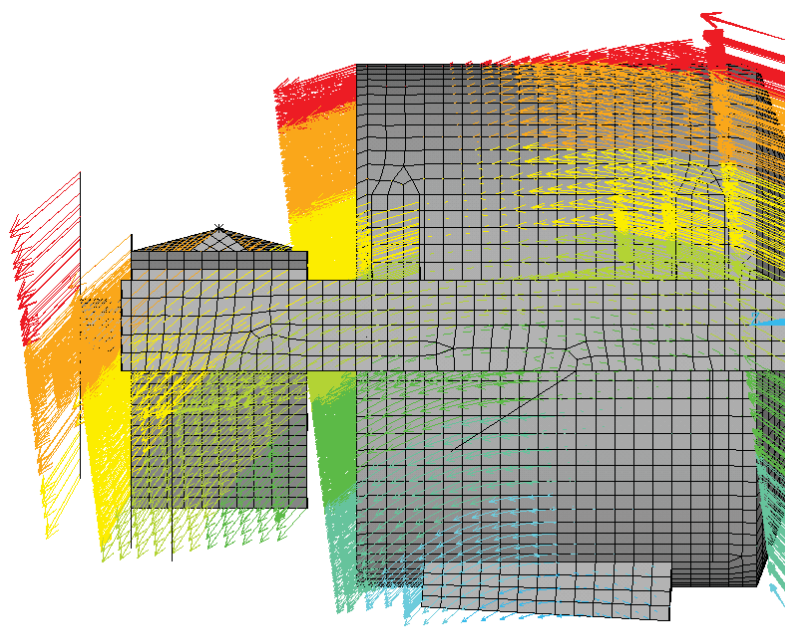
## 1. vlastní tvar – vlastní frekvence 1,11Hz

---

Dominantní pohyb soustavy je ve směru osy otáčení (osa z), zadní část ovšem také kmitá ve směru kolmém na tuto osu (osa y) čímž dochází k jemnému natáčení soustavy



Obr. 5.1 – 1. vlastní tvar, zobrazení posunutí

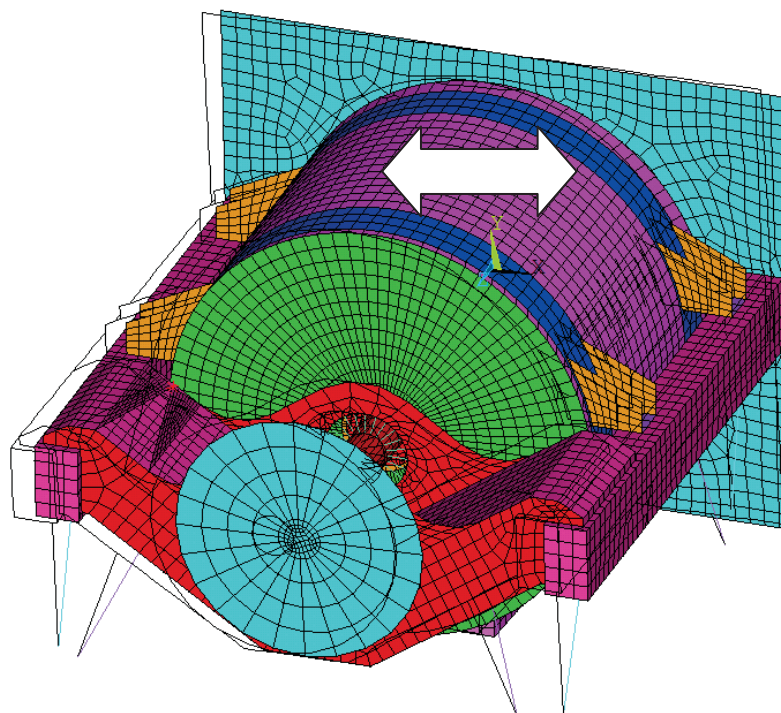


Obr. 5.2 – 1. vlastní tvar, vektorové zobrazení

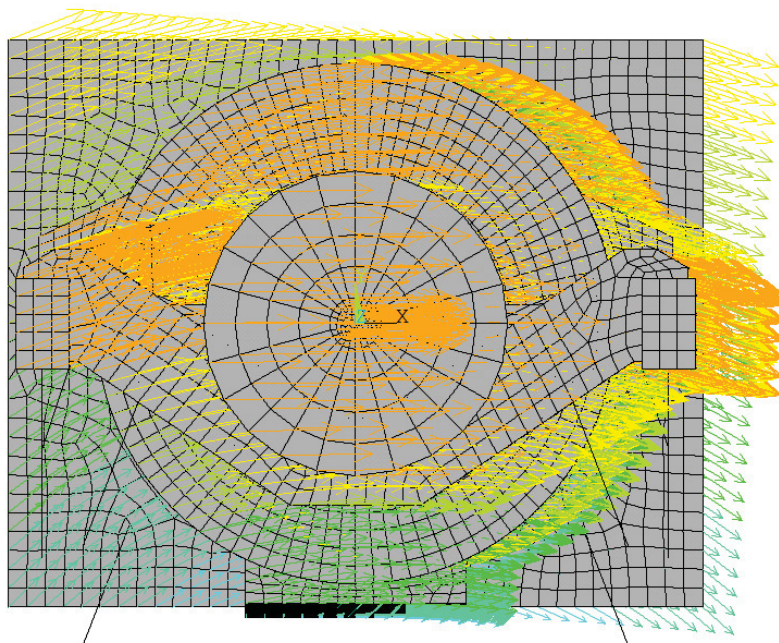
## 2. vlastní tvar – vlastní frekvence 1,21Hz

---

Soustava kmitá ve vodorovném směru (osa x), ale dochází také k mírnému natáčení ve směru hodinových ručiček



Obr. 5.3 – 2. vlastní tvar, zobrazení posunutí

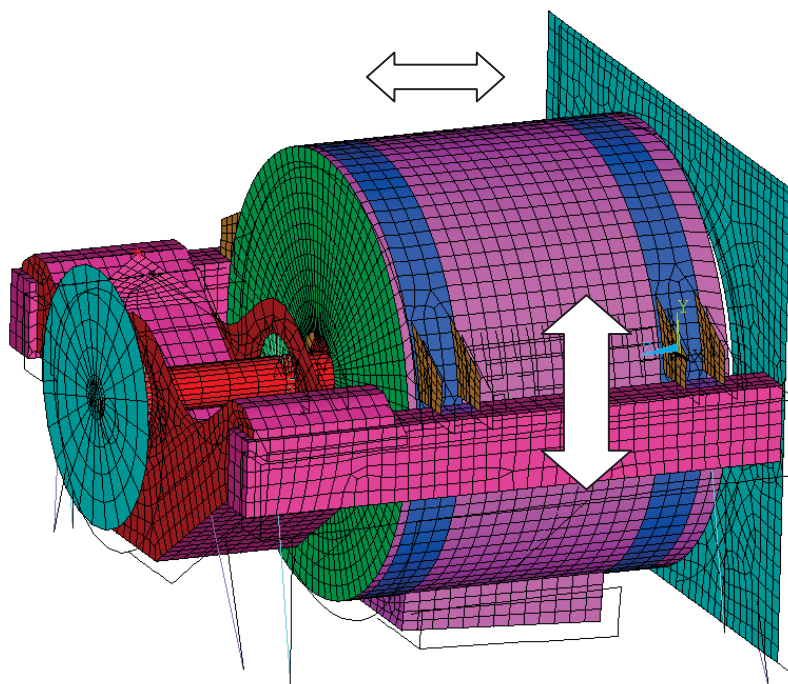


Obr. 5.4 – 2. vlastní tvar, vektorové zobrazení

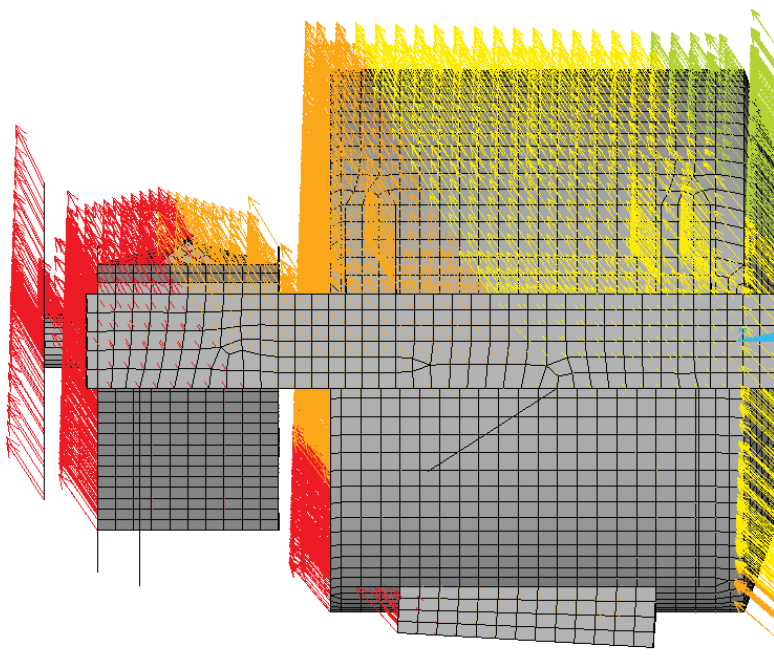
### 3. vlastní tvar - vlastní frekvence 1,45Hz

---

U soustavy dochází primárně ke svislému kmitání (osa y), které je ovšem ovlivněno také kmitnám podélným.



Obr. 5.5 – 3. vlastní tvar, zobrazení posunutí



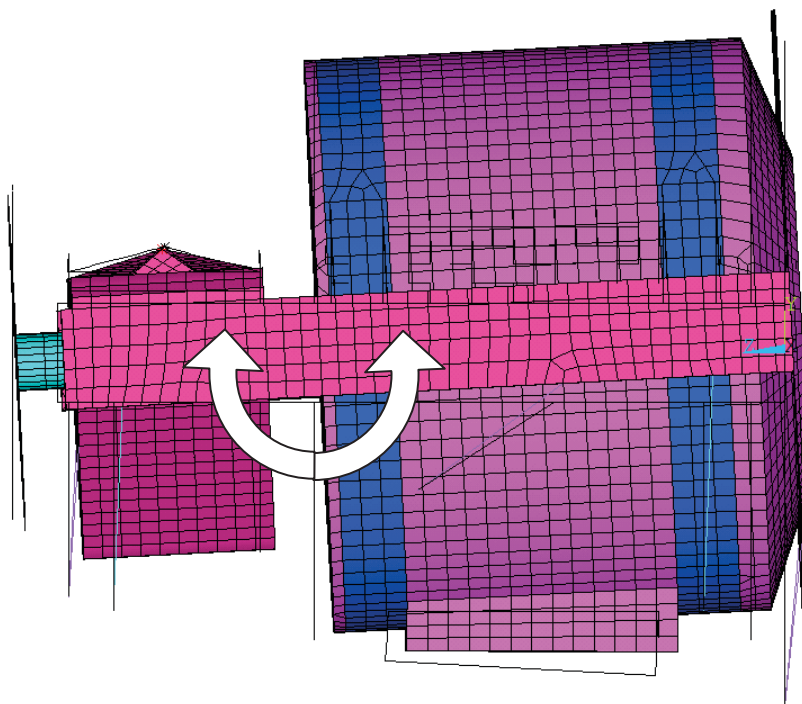
Obr. 5.6 – 3. vlastní tvar, vektorové zobrazení



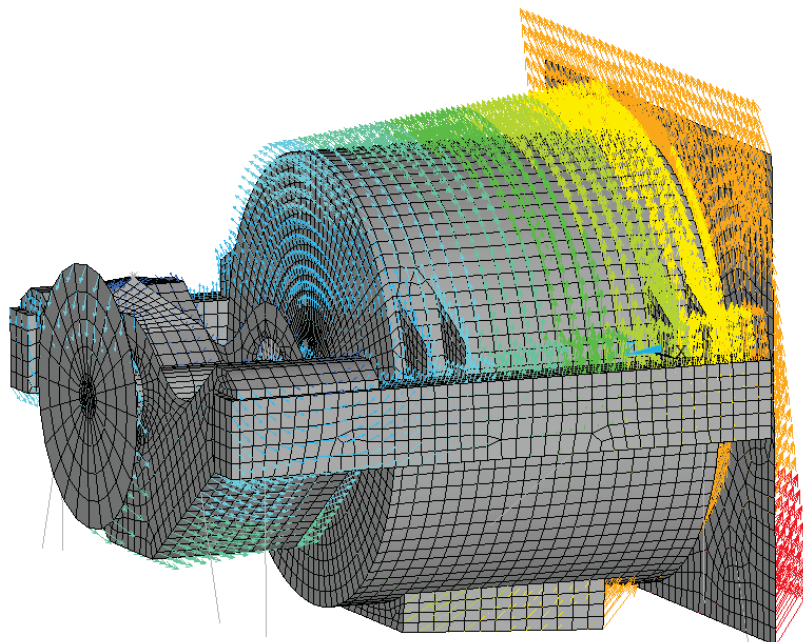
#### 4. vlastní tvar – vlastní frekvence 2,31Hz

---

U čtvrtého vlastního tvaru dochází ke kmitání okolo osy x



Obr. 5.7 – 4. vlastní tvar, zobrazení posunutí

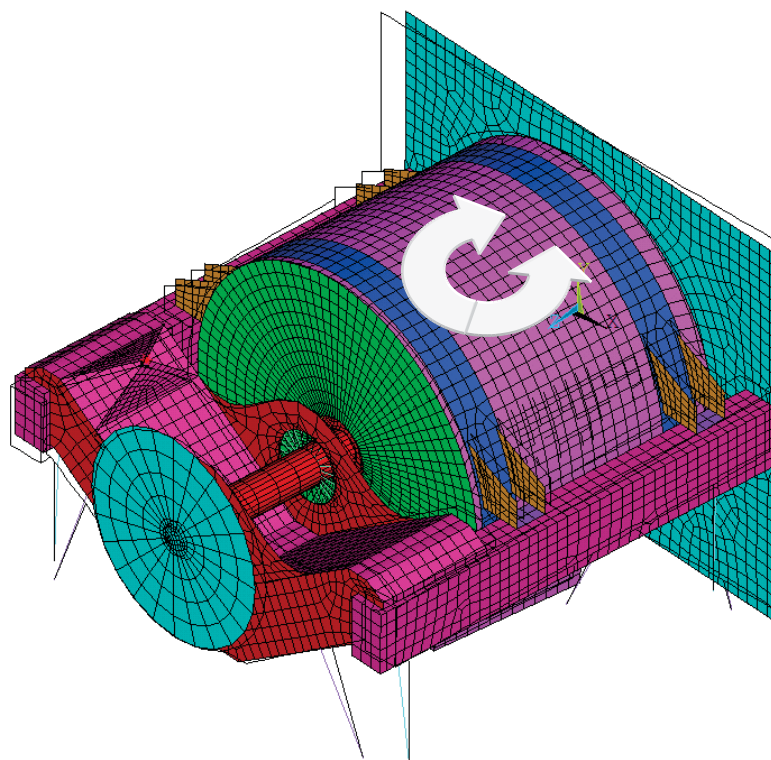


Obr 5.8 – 4. vlastní tvar, vektorové zobrazení

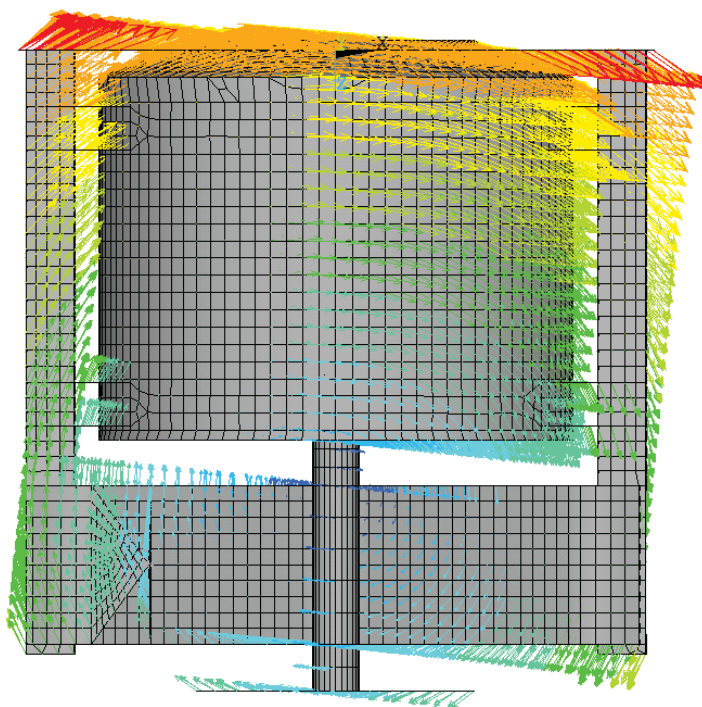
## 5. vlastní tvar – vlastní frekvence 2,37Hz

---

Kmitání kolem svislé osy (osa y)



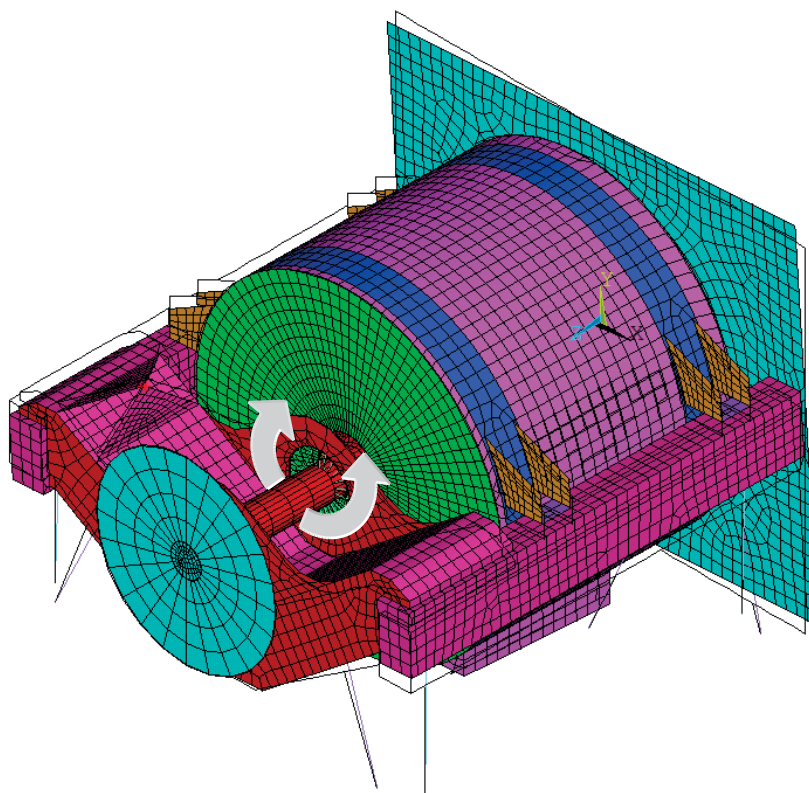
Obr. 5.9 – 5. vlastní tvar, zobrazení posunutí



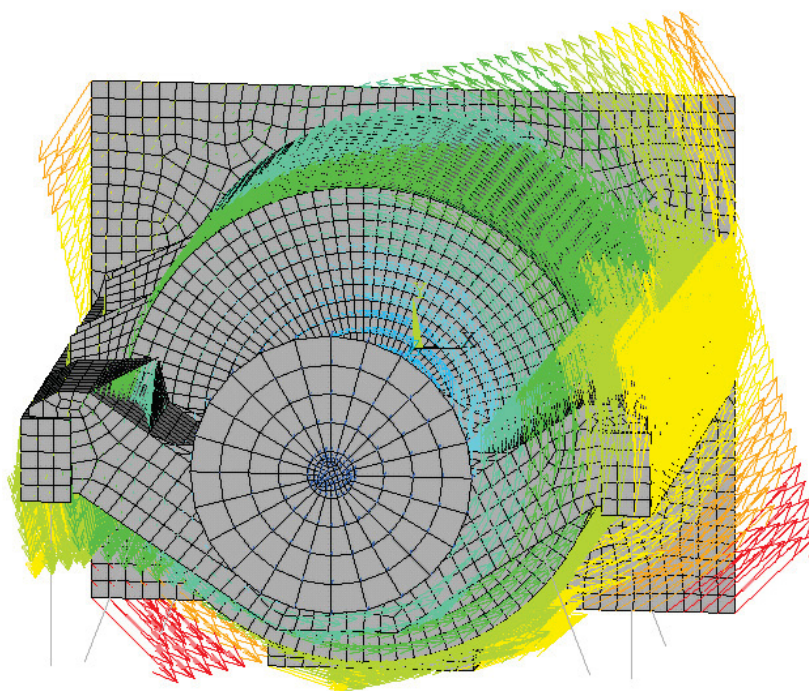
Obr. 5.10 – 5. vlastní tvar, vektorové zobrazení

## 6. vlastní tvar – vlastní frekvence 3,47Hz

Natáčení celé soustavy okolo osy rotace hřídele a vnitřního bubnu (osa z)



Obr 5.11 – 6. vlastní tvar, zobrazení posunutí



Obr 5.12 – 6. vlastní tvar, vektorové zobrazení

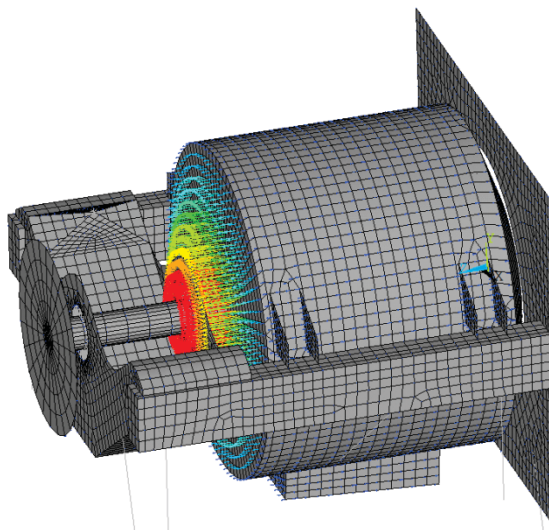


Z vizualizací prvních šesti vlastních tvarů si lze povšimnout, že jednotlivé vlastní tvary odpovídají jednotlivým stupňům volnosti celé soustavy – posuv ve třech směrech a rotace kolem tří os. Následující tři vlastní tvary, však přísluší deformacím jednotlivých dílů nebo jejich kombinacím, což také reprezentují vyšší hodnoty vlastních frekvencí.

#### 7. vlastní tvar – vlastní frekvence 21,45Hz

---

Membránové kmitání zadní desky vnějšího bubnu

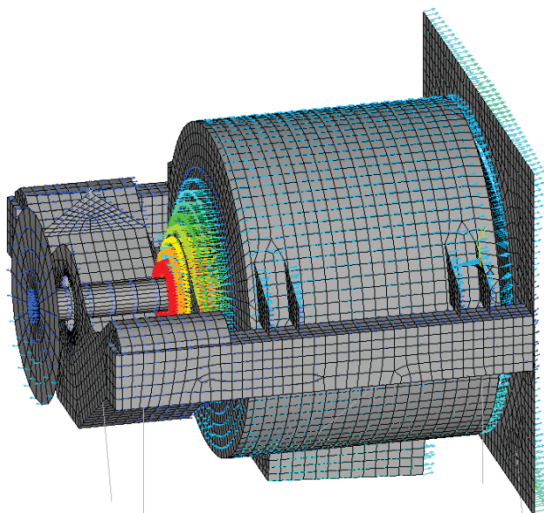


Obr. 5.13 – 7. vlastní tvar, vektorové zobrazení

#### 8. vlastní tvar – vlastní frekvence 27,73Hz

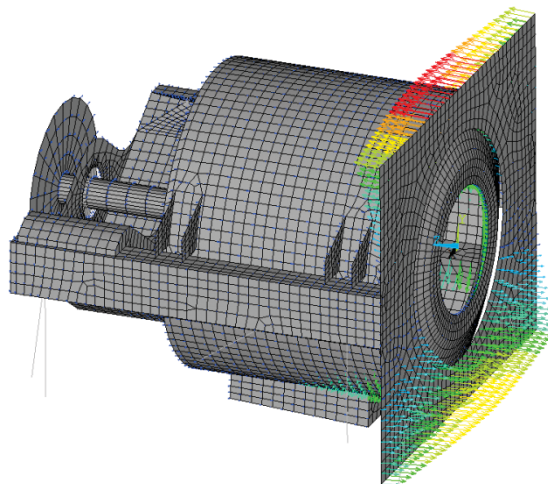
---

Membránové kmitání zadní desky vnějšího bubnu v protifázi s čelní deskou



Obr. 5.14 – 8. vlastní tvar, vektorové zobrazení

Kmitání čelní desky spolu s ní svisle kmitá vnitřní buben



Obr 5.15 – 9. vlastní tvar, vektorové zobrazení

Nejlépejší zobrazení vlastních tvarů však podávají animace. Názvy animací lze najít v tabulce vlastních frekvencí. Animace jsou součástí přílohy.

Je nutno podotknout, že soustava nemá pouze devět vlastních tvarů, ale mnohem více, zobrazující deformace jednotlivých částí a jejich kombinace. Při narůstajícím počtu vlastních tvarů ovšem dochází k nepřesnosti týkající se velikostí vlastních frekvencí, ty obecně bývají menší než hodnoty vypočtené a lze je brát pouze jako orientační.

## 6. Harmonická analýza

V předchozím výkladu bylo řečeno, že účel harmonické analýzy spočívá v zjištění odezvy soustavy na buzení. V našem případě se jedná o vyřešení soustavy algebraických rovnic v komplexním oboru, kde výsledky budou uváděny odděleně jak pro reálnou složku, tak i pro složku imaginární.

Celý harmonický průběh lze potom vyjádřit rovnicí

$$u(t) = \text{reálná} \cdot \sin(\omega t) + \text{imaginární} \cdot \cos(\omega t) \quad (6.1)$$

Velikost amplitudy, lze ji vypočítat dle vztahu

$$\text{amplituda} = \sqrt{\text{real}^2 + \text{imag}^2} \quad (6.2)$$

## 6.1. Buzení

Pro provedení harmonické analýzy bylo zadáno buzení odstředivou silou, která je dána vztahem

$$F_{od} = m \cdot e \cdot (2 \cdot \pi \cdot f)^2 \quad (6.3)$$

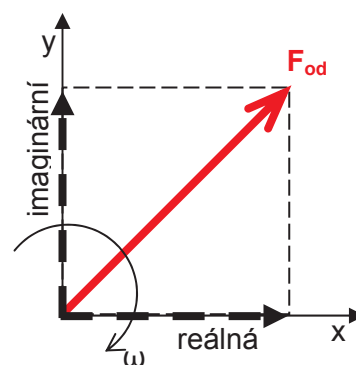
Odstředivá síla je generována závažím umístěným na stěně a po celé délce vnitřního bubnu, jehož těžiště bylo od osy otáčení vzdáleno  $e = 0,597m$ . Pro analýzu byly definovány dvě hmotnosti zkušebního závaží při stejných otáčkách.

- Závaží 11,5kg odpovídající 10% užitečné hmotnosti při  $n = 140 \text{ ot/min}$
- Závaží 23kg odpovídající 20% užitečné hmotnosti při  $n = 140 \text{ ot/min}$

Po přepočtu hmotnosti závaží na odstředivou sílu jsme dostali hodnoty

- $F_{od1} = 1477N$  - 10% užitečné hmotnosti
- $F_{od2} = 2954N$  - 20% užitečné hmotnosti

Závaží rotuje společně s vnitřním bubnem úhlovou rychlostí  $\omega = 14,66 \text{ rad/s}$  a frekvencí  $f = 2,33 \text{ Hz}$ . Jednotlivé složky síly (vodorovná a svislá) jsou mezi sebou fázově posunuty o  $90^\circ$ . Při zadávání síly je nutné toto zohlednit. Proto bude vodorovná síla zadána jako reálná a imaginární bude nulová a síla svislá jako imaginární a reálná bude rovna nule. Z těchto dvou jednotlivých složek síly, bude následně složena celková odstředivá síla v závislosti na časovém průběhu.



Obr. 6.1 – budící síla

V soustavě hraje významnou roli tlumení, jež je způsobováno nejen šesti tlumiči, ale také tlumením tzv. proporciálním, které má speciální matici útlumu ve tvaru

$$B = \alpha \cdot M + \beta \cdot K \quad (6.4)$$

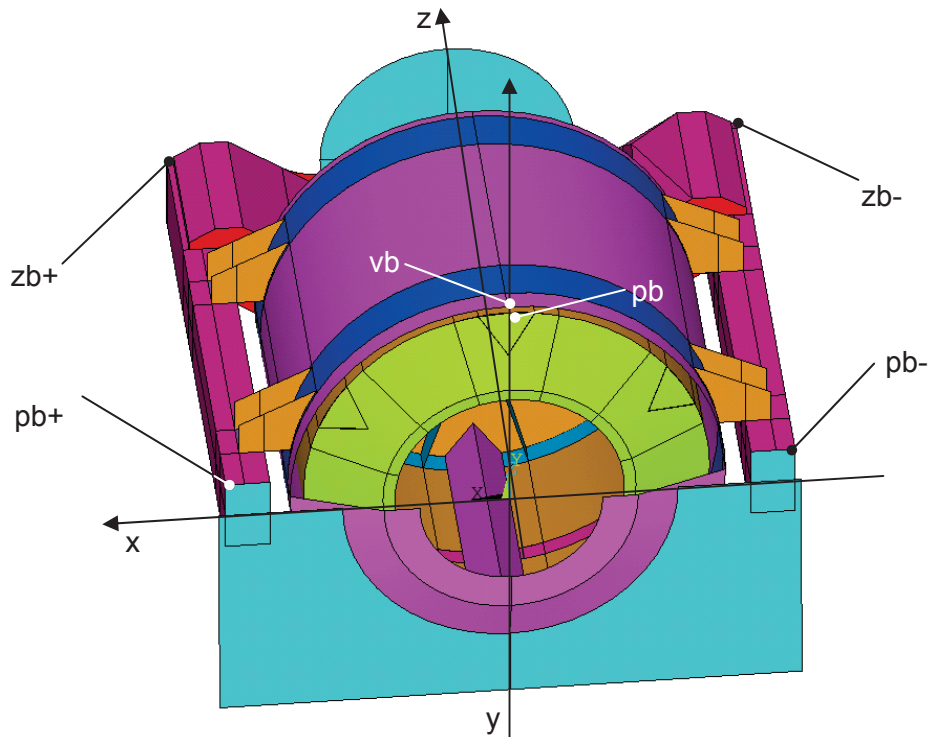
Výraz  $\alpha \cdot M$  zohledňuje vnější tlumení, výraz  $\beta \cdot K$  naopak tlumení vnitřní neboli materiálové. Žádné vnější tlumení na soustavu nepůsobí, čili koeficient  $\alpha = 0$ . Koeficient  $\beta$  lze vypočítat pomocí rovnice

$$\beta = \frac{\xi}{\pi \cdot f_1} \quad (6.5)$$

Kde  $\xi$  je tzv. poměrný útlum a jeho velikost je uváděna jako  $\xi \cong 3\text{‰}$ ,  $f_1$  je první vlastní frekvence. Výsledná hodnota koeficientu  $\beta$  je

$$\beta = 0,00086$$

Abychom věděli „jak moc“ pračka kmitá, vybereme na horním rámu čtyři body. Pro tyto body sestavíme celý časový průběh a následně jej vykreslíme. Užitečná může být také informace o změně velikosti mezery mezi vnitřním a vnějším bubnem. Z tohoto důvodu také vyberme dva body (na každém bubnu jeden) jejíž změnu polohy v čase také budeme zkoumat. Vybrané body a jejich lze vidět na obr. 6.2



Obr. 6.2 – vybrané body pro zkoumání

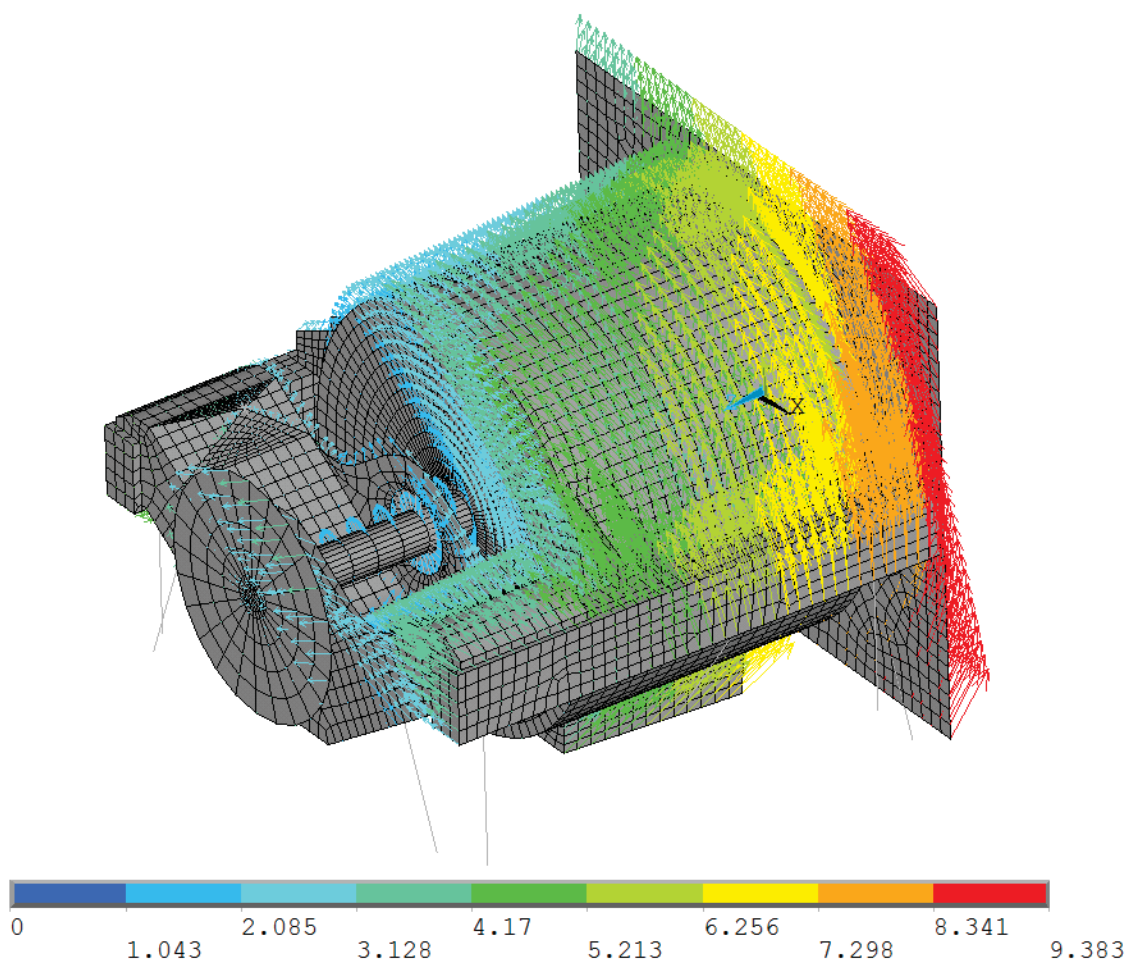
Označení jednotlivých bodů:

- pb+ ..... bod nacházející se u přední desky a na kladné straně osy x
- pb- ..... bod nacházející se u přední desky a na záporné straně osy x
- zb+ ..... bod nacházející se v zadním rohu a na kladné straně osy x
- zb- ..... bod nacházející se v zadním rohu a na záporné straně osy x
- vb ..... bod na vnějším bubnu
- pb ..... bod na vnitřním (pracím) bubnu

Poněvadž byly síly zadávány zvlášť jako reálná a imaginární složka, budou také takto zvlášť zobrazeny. Celkový průběh kmitání nelze zobrazit statickým obrázkem, z tohoto důvodu byly vytvořeny animace, na kterých lze vidět celkový harmonický průběh kmitající pračky.

Reálná složka -  $F_{od1} = 1477 \text{ N}$  , frekvence  $f = 2,33 \text{ Hz}$ .

Zadní část pračky kmitá ve vodorovném směru, ovšem přední část kmitá ve směru šikmém.



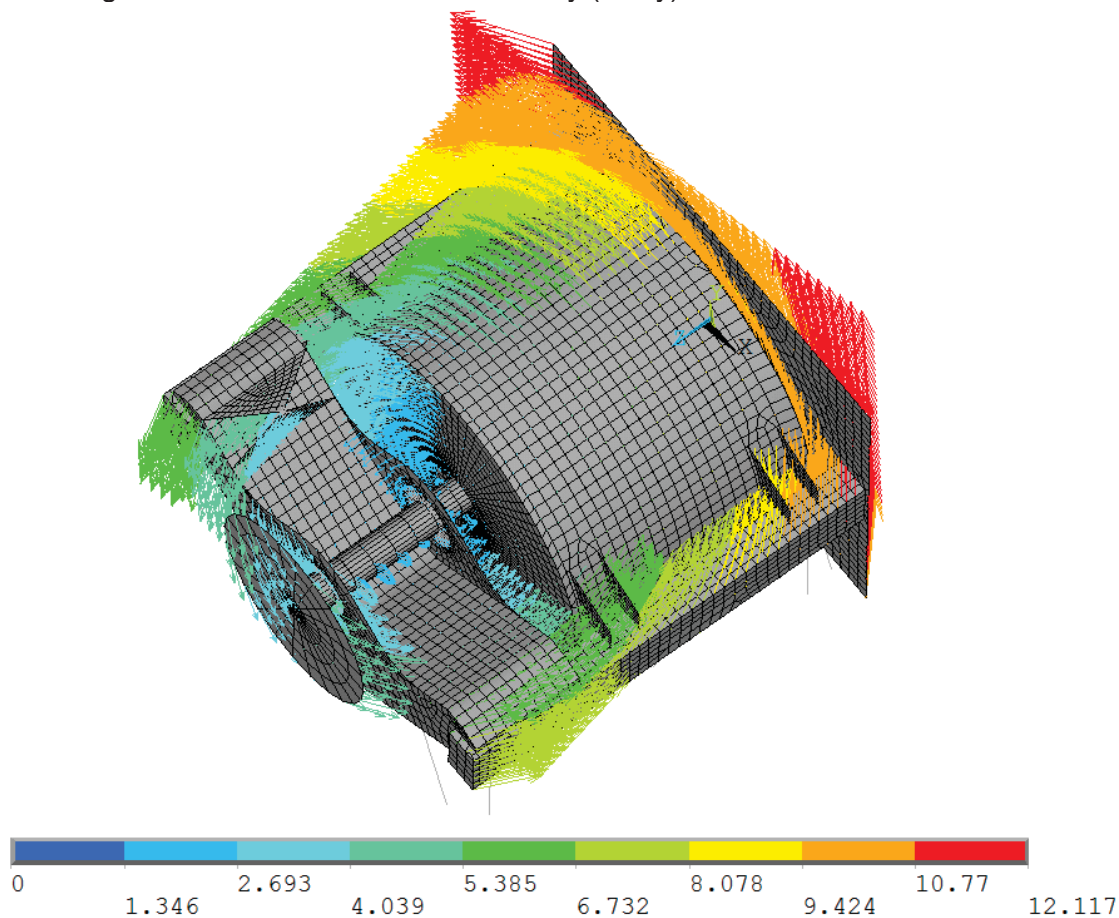
Obr. 6.3 – směr reálné složky a velikost posunutí v [mm]



Imaginární složka -  $F_{od1} = 1477 \text{ N}$  , frekvence  $f = 2,33\text{Hz}$ .

---

Imaginární složka kmitá kolem svislé osy (osa y)



Obr. 6.4 – směr imaginární složky a velikost posunutí v [mm]

Pod obrázky 6.3 a 6.5 lze vidět barevnou škálu označující velikost posunutí v jednotlivých uzlech elementů.

Obrázky znázorňující velikosti a směr posunutí reálné a imaginární složky, pro závaží jehož hmotnost činí 20% užitečné kapacity, jsou součástí přílohy pod označením *harmonic2-real.bmp* a *harmonic2-imag.bmp*. Obrázky znázorňují stejný směr posunutí ovšem velikost jeho je dvojnásobná, což také vyplývá z dvojnásobné zatěžující síly.

Animace zobrazující jednotlivé průběhy ustáleného harmonického kmitání jsou součástí přílohy a mají označení:

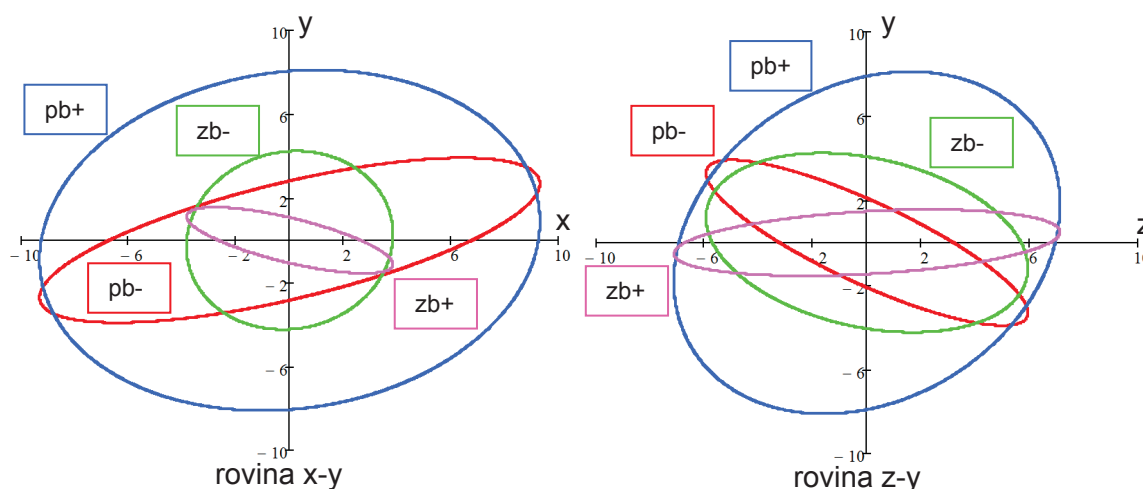
- harmonic\_01.avi – zobrazení pohybu pomocí vektorů pro závaží 11,5kg
- harmonic\_02.avi – zobrazení pohybu pračky pro závaží 11,5kg
- harmonic\_03.avi – zobrazení pohybu pomocí vektorů pro závaží 23kg
- harmonic\_04.avi – zobrazení pohybu pračky pro závaží 23kg

Vypočtená posunutí jednotlivých bodů v [mm]				
	pb+	pb-	zb+	zb-
x – reálná	1,94	1.94	-2,77	-2,77
x – imaginární	-9,11	-9,11	2,67	2,67
x – celková	9,31	9,31	3,85	3,85
y – reálná	8,07	3,35	1,57	-3,15
y – imaginární	0,80	-2,05	0	-2,86
y – celková	8,11	2,75	1,57	4,26
z – reálná	2,28	-2,58	2,28	-2,58
z – imaginární	-6,76	5,35	-6,75	5,35
z – celková	7,13	5,94	7,13	5,94

Tab 6.1 – přehled vypočtených hodnot

Z tabulky si lze povšimnout, že oba přední body mají totožné hodnoty posunutí složky **x**, stejná situace nastává také pro dvojici zadních bodů. Také na hodnoty na ose **z**, lze nalézt totožné hodnoty a to pro body **pb+** a **zb+**.

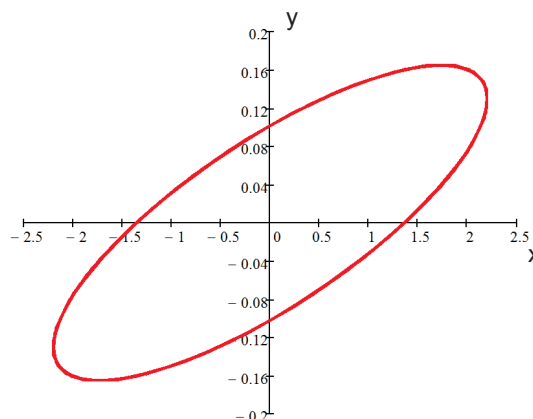
Ve výzkumné práci [2] byly vypočtené hodnoty porovnávány s hodnotami experimentálně změřenými, ovšem jednalo se o poněkud odlišné konstrukční řešení. Nicméně je třeba zmínit že řády mnou vypočtených hodnot a řády hodnot naměřených se shodují a lze tedy konstatovat že model je použitelný pro provádění dynamických analýz.



Obr 6.5 – Vykreslené trajektorie jednotlivých rohových bodů

Na obr. 6.5 jsou vykresleny trajektorie jednotlivých rohových bodů. Pro tyto body, byl jednotlivě spočítán celý harmonický průběh a následně vyneseno do kartézského souřadného systému.

Při analýze byly také zvoleny dva body, díky nimž jsme mohli sledovat změnu velikosti mezery mezi vnitřním (pracím) a vnějším bubnem. Velikost mezery je  $43\text{mm}$ . Pro tyto body byl stejně, jako pro body rohové sestaven celý harmonický průběh. Abychom však dostali pouze měnící se velikost mezery, bylo nutné jednotlivé harmonické průběhy od sebe odečíst. Z obr. 6.6 lze vyčíst, že maximální výchylka ve směru osy  $x$  je asi  $2,3\text{mm}$  a výchylka na osy  $y$  je přibližně  $0,18\text{mm}$ .



Obr. 6.6 – změna velikosti mezery

Uvážíme-li velikosti vypočtených hodnot, lze konstatovat, že mezera mezi bubny se mění jen nepatrně a není třeba jí věnovat další pozornost.

## 6.2. Amplitudová charakteristika

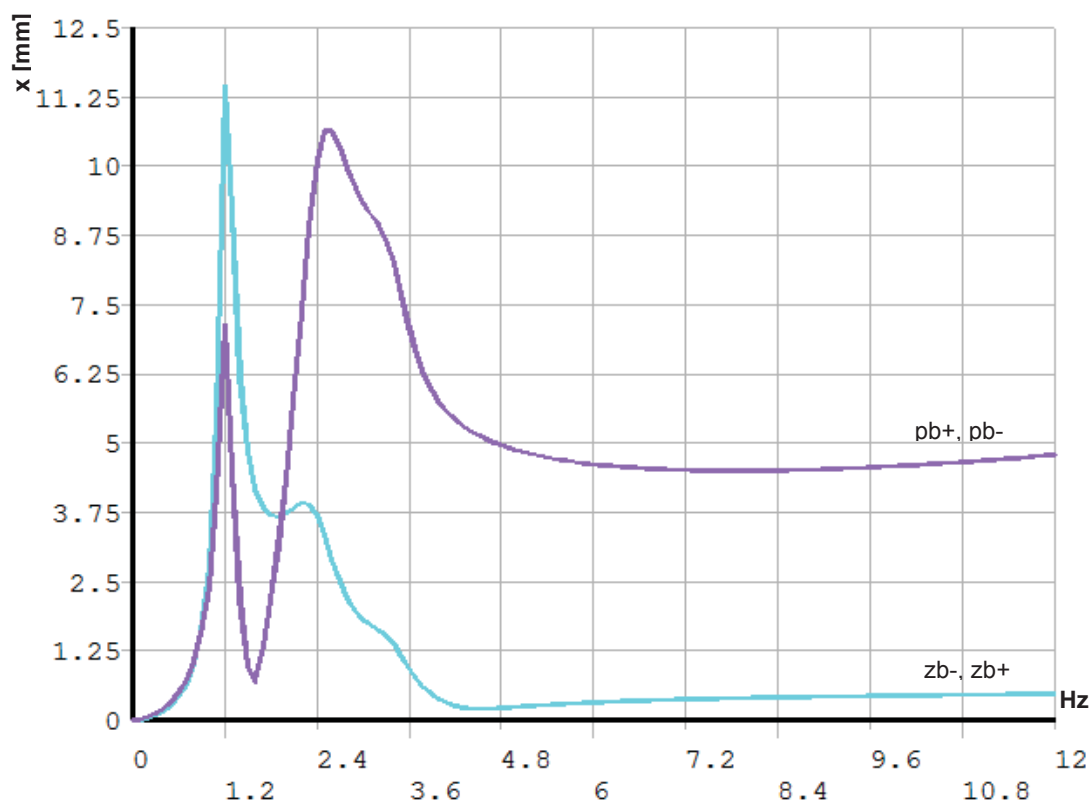
V kapitole 3.2 byla zmíněna rezonance a nutnost vyšetření zdali se soustava v rezonanci nachází. Proto sestavíme tzv. amplitudovou charakteristiku, která zobrazuje velikost amplitudy, jež je závislá na budící frekvenci.

Provedeme řadu výpočtů, při níž se bude měnit velikost budící frekvence. Zvolené rozmezí zohledňuje celé spektrum otáček, vyskytující se v průběhu pracovního cyklu. V každém kroku výpočtu bude přepočtena velikost odstředivé síly dle rovnice 6.3, kde proměnnou hodnotou bude budící frekvence.

Rozmezí otáček  $n$  je stanoveno na  $0 - 720\text{ot/min}$ , což odpovídá frekvenci  $f = 0 - 12\text{Hz}$ , hmotnost zatěžujícího závaží je  $11,5\text{kg}$ . Výpočet je rozdělen na 120 kroků, při výpočtu každého kroku se frekvence se zvýší o  $0,1\text{Hz}$ .

Výstupem z těchto výpočtů bude požadovaná amplitudová charakteristika pro již zvolené rohové body horního rámu.

### Posunutí rohových bodů ve směru osy x



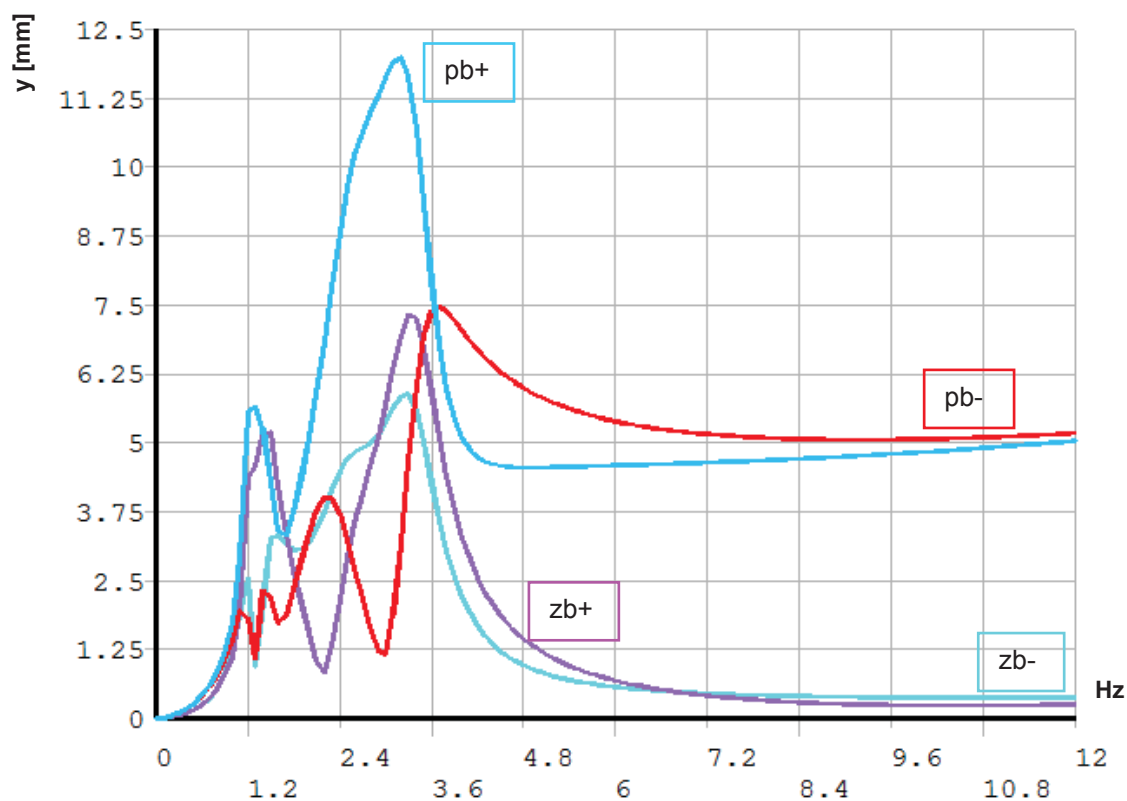
Obr. 6.7 – průběh posunutí ve směru x

V průběhu jednotlivých amplitud na obr. 6.7 lze vypořádat několik špiček. Ty jsou způsobeny právě rezonancí kde je budící frekvence rovna nebo velmi blízko vlastní frekvenci některého z šesti vlastních tvarů, jež byly zjištěny při modální analýze. Z obrázku také zjevné, že jednotlivé páry bodů (přední a zadní), mají stejné amplitudy. Stejný jev jsme mohli pozorovat už v tab. 6.1

#### Lokální maxima

zb+, zb-	1,2Hz – 11,44mm, rezonance s 2. vlastní frekvencí – 1,21Hz
	2,2Hz – 3,91mm, rezonance se 4. vlastní frekvencí – 2,31Hz
pb+, pb-	1,2Hz – 7,15mm, rezonance s 2. vlastní frekvencí – 1,21Hz
	2,6Hz – 10,64mm, rezonance se 4. vlastní frekvencí – 2,37Hz

### Posunutí rohových bodů ve směru osy $y$



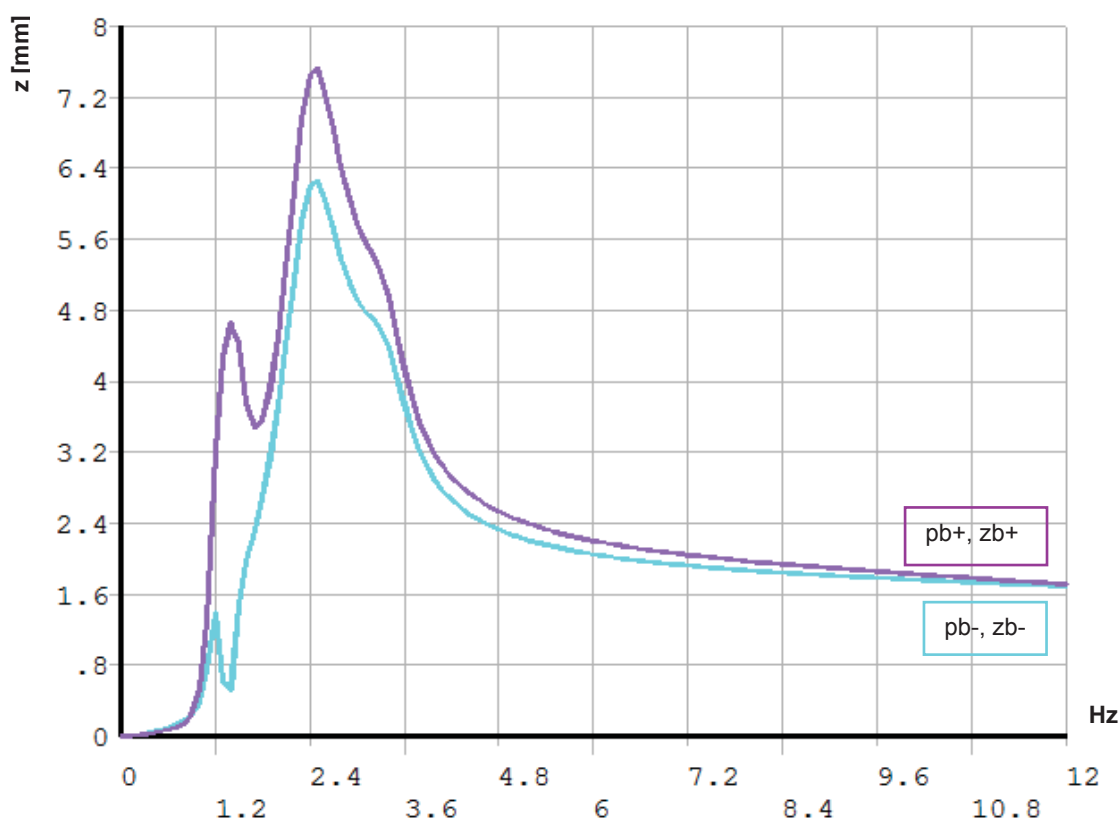
Obr. 6.8 – průběh posunutí ve směru  $y$

Ovšem ve směru osy  $y$  je situace jiná, každý rohový bod má jiné hodnoty amplitud. Na obr 6.8 lze také pozorovat mnoho špiček, jež jsou způsobeny rezonancí s jednotlivými vlastními tvary. Uvedené hodnoty jsou pouze jen pro ty největší.

#### Lokální maxima

zb+	3,3Hz – 7,31mm, rezonance s 6. vlastní frekvencí – 3,47Hz
zb-	3,3Hz – 5,88mm, rezonance s 6. vlastní frekvencí – 3,47Hz
pb+	3,2Hz – 11,99mm, rezonance s 6. vlastní frekvencí – 3,47Hz
pb-	3,7Hz – 7,46mm, rezonance s 6. vlastní frekvencí – 3,47Hz

### Posunutí rohových bodů ve směru osy z



Obr. 6.9 – průběh posunutí ve směru z

V amplitudách na ose **z**, lze opět pozorovat kmitající páry bodů. Na rozdíl od minulého případu se nyní nejedná o páry přední a zadní nýbrž o páry bodů ležících na jednotlivých stranách roviny **y-z**. Tento jev lze také pozorovat v tab. 6.1

#### Lokální maxima

zb-, pb-	1,2Hz – 1,39mm, rezonance s 2. vlastní frekvencí – 1,21Hz
	2,5Hz – 6,25mm, rezonance s 5. vlastní frekvencí – 2,37Hz
zb+, pb+	1,4Hz – 6,44mm, rezonance s 3. vlastní frekvencí – 1,45Hz
	2,5Hz – 7,52mm, rezonance s 5. vlastní frekvencí – 2,37Hz

## 7. Vyhodnocení a závěr

Předmětem bakalářské práce bylo provést modální a harmonickou analýzu průmyslové pračky FS115 jejíž kapacita je 115kg prádla. V úvodu byla krátce popsána historie pračky a její postupný vývoj. Následující kapitola se zabývala popisem mechanismu zkoumané pračky, kde byla popsána konstrukce a funkce jednotlivých částí.

V třetí kapitole byl rozebrán matematický popis dané problematiky, teorie byla rozdělena na dvě části. První se zabývala modální analýzou, druhá analýzou harmonickou. V každé části byla popsána teorie potřebná k pochopení problému a její aplikace na jednoduchý příklad. Výstupem z výpočtu jednoduchého příkladu byly pro modální analýzu vlastní frekvence a vlastní tvary u harmonické analýzy jsme zjistili hodnoty amplitud v jednotlivých směrech. Příklad byl také modelován v programu ANSYS díky němuž bylo možno vlastní tvary a harmonický průběh animovat. Animace jsou součástí přílohy.

Kapitola čtvrtá zjednodušeně popisuje princip metody konečných prvků, jaké typy prvků byly použity a jak vypadá výsledný konečoprvkový model nutný pro následné výpočty. Model byl vytvořen v programu ANSYS. Na celý model průmyslové pračky bylo použito 15 056 elementů a 16130 uzlů.

Obsahem páté kapitoly byla modální analýza, jejíž princip spočíval v nalezení vlastních frekvencí a vlastních tvarů zkoumané soustavy. Analýza byla provedena pouze pro netlumenou soustavu. Jednotlivé vlastní tvary byly zobrazeny a také slovně popsány. Animace zobrazující průběh kmitání jednotlivých vlastních tvarů lze nalézt v příloze.

Šestá kapitola se zabývá harmonickou analýzou pračky. Ta byla provedena pro dva druhy zatížení, závaží mělo hmotnost odpovídající 10% a 20% užité kapacity pračky. Na pračce bylo také vybráno šest bodů, které byly sledovány. Jejich pojmenování a umístění lze nalézt na obr. 6.2. Po výpočtu byl pro tyto body sestaven celý harmonický průběh, který byl následně vykreslen. Čtyři body byly použity pro sledování trajektorie kmitání jednotlivých rohových bodů, které lze nalézt na obr. 6.5. Na zbývajících dvou bodech byla sledována změna mezery mezi vnitřním a vnějším bubnem. Na základě obr. 6.6 lze konstatovat, že dochází jen k velmi malému zmenšení mezery mezi těmito bubny vzhledem k původnímu rozměru. Závěrem byla provedena amplitudová charakteristika, která pokrývá celé spektrum frekvencí, jež odpovídají všem otáčkám vyskytující se v průběhu praní. Charakteristika byla sestavena jednotlivě pro všechny tři směry posunutí ve směru os **x**, **y**, **z**. U jednotlivých charakteristik lze také nalézt stručná popis a maximální hodnoty, k nimž dochází díky rezonanci s vlastními tvary. Pro výpočet

amplitudových charakteristik bylo potřeba pro program ANSYS vytvořit makro, jež zajišťovalo změnu frekvence a následné přepočtení odstředivé síly. Výpis makra lze nalézt v příloze.



## Přehled použité literatury

1. **Bittnar, Z. a Řeřicha, P.** *Metoda konečných prvků v dynamice konstrukcí*. Praha : SNTL, 1981.
2. **Podešva, J.** *Výzkumná práce - dynamický model pračky FS115*. Ostrava : VŠB - TU, 2001.
3. **James, S.** Washing machines. *Canada Science and Technology Museum*.  
[http://www.sciencetech.technomuses.ca/english/collection/washing\\_machines.cfm](http://www.sciencetech.technomuses.ca/english/collection/washing_machines.cfm).

## **Poděkování**

Tímto chci poděkovat Doc. Ing. Jiřímu Podešvovi Ph.D. za odborné vedení , věnovaný čas a věcné rady, které byly cenným podkladem při vypracování mé práce bakalářské práce.

## Přílohy

### 1. Makro použité pro výpočet amplitudové charakteristiky v kap. 6.2

FINISH

/SOLUTION

ANTYPE,harmonic

! nastaveni nove analyzy

HROPT,FULL

\*DO,i,0,120

! zacatek cyklu

otacky=6\*i

! otacky za minutu

\*SET,omega,3.1416\*otacky/30

! uhlova rychlost

\*SET,Fod,11.5\*0.597\*omega\*\*2

! odstrediva sila

FDELETE,all,all

! smazani vsech sil

CMSEL,S,NSILA

! vyber uzlu pro aplikaci sily

F,all,FX,Fod/2250,0

! aplikace realne slozky sily

F,all,FY,0,Fod/2250

! aplikace imaginarni slozky sily

allsel

HARFRQ,0,otacky/60

! nastaveni budici frekvence

NSUBST,1

KBC,1

ALPHAD,0,

BETAD,0.00086,

! nastaveni proporcionalniho  
tlumeni

SOLVE

! spusteni resice

\*ENDDO

! konec cyklu

FINISH

## 2. Elektronický nosič DVD

- Text bakalářské práce
- Animace :
  - pr\_modal01.avi – první vlastní tvar vzorového příkladu
  - pr\_modal02.avi – druhý vlastní tvar vzorového příkladu
  - pr\_harmonic01.avi – harmonický průběh vzorového příkladu
  - modal\_01.avi – první vlastní tvar průmyslové pračky
  - modal\_02.avi – druhý vlastní tvar průmyslové pračky
  - modal\_03.avi – třetí vlastní tvar průmyslové pračky
  - modal\_04.avi – čtvrtý vlastní tvar průmyslové pračky
  - modal\_05.avi – pátý vlastní tvar průmyslové pračky
  - modal\_06.avi – šestý vlastní tvar průmyslové pračky
  - modal\_07.avi – sedmý vlastní tvar průmyslové pračky
  - modal\_08.avi – osmý vlastní tvar průmyslové pračky
  - modal\_09.avi – devátý vlastní tvar průmyslové pračky
  - harmonic\_01.avi – vektorové zobrazení harmonického průběhu pro závaží 11,5kg
  - harmonic\_01.avi – zobrazení přemístění jednotlivých elementů harmonického průběhu pro závaží 11,5kg
  - harmonic\_02.avi – vektorové zobrazení harmonického průběhu pro závaží 23kg
  - harmonic\_02.avi – zobrazení přemístění jednotlivých elementů harmonického průběhu pro závaží 23kg
- Obrázky:
  - Harmonic2-real.bmp – zobrazení reálné složky síly pro závaží 23kg
  - Harmonic2-imag.bmp – zobrazení imaginární složky síly pro závaží 23kg
- vypocet.txt - ANSYS makro pro výpočet amplitudové charakteristiky